

Modelo de prueba 2020/21

Resolución completa de los ocho ejercicios del modelo oficial.

Ejercicio 1

El dominio excluye $x = -1$. Dividimos el numerador por el denominador:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{x + 1}.$$

Por ello hay una asíntota vertical $x = -1$ (los límites laterales son infinitos) y una asíntota oblicua $y = \frac{x}{2} + 1$, pues la diferencia entre $f(x)$ y esa recta tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$. No hay asíntotas horizontales. Para estudiar el crecimiento, derivamos en el dominio:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 2}{2(x+1)^2}.$$

Los puntos críticos son $x = -1 \pm \sqrt{2}$, y junto al punto excluido $x = -1$ separan los intervalos. El signo de la derivada es positivo en $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ y $(-1 + \sqrt{2}, \infty)$, y negativo en $(-1 - \sqrt{2}, -1)$ y $(-1, -1 + \sqrt{2})$. Por tanto, hay un máximo relativo en

$$\left(-1 - \sqrt{2}, \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}\right)$$

y un mínimo relativo en

$$\left(-1 + \sqrt{2}, \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}\right).$$

Ejercicio 2

La derivada de $f(x) = (x - a)e^x$ es $f'(x) = e^x(x - a + 1)$. Para que $x = 0$ sea punto crítico debe cumplirse $f'(0) = 0$; como $e^0 = 1$, resulta $1 - a = 0$ y

$$a = 1.$$

Con este valor, $f(x) = (x - 1)e^x$ y $f''(x) = (x + 1)e^x$. La exponencial es positiva y f'' cambia de signo al pasar por $x = -1$, así que allí hay un punto de inflexión. Su ordenada es $f(-1) = -2/e$, de modo que el punto es $(-1, -2/e)$.

Ejercicio 3

Usamos el cambio sugerido $t = e^x$, de modo que $dx = dt/t$. El integrando se transforma en

$$\frac{1 + e^x}{1 - e^x} dx = \frac{1 + t}{t(1 - t)} dt = \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{1 - t}\right) dt.$$

Por tanto, una primitiva es $\ln t - 2 \ln |1 - t| + C$. Como $x > 0$, $t > 1$; al volver a x obtenemos $F(x) = x - 2 \ln(e^x - 1) + C$. La condición $F(1) = 1$ determina $C = 2 \ln(e - 1)$ y queda

$$F(x) = x - 2 \ln(e^x - 1) + 2 \ln(e - 1).$$

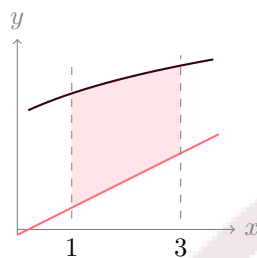
Ejercicio 4

En el intervalo $[1, 3]$ la curva $f(x) = \ln(x+2)$ está por encima de la recta $g(x) = \frac{x-3}{2}$; por ejemplo, la diferencia es positiva en los extremos y decrece, ya que

$$(f-g)'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} < 0 \quad (1 \leq x \leq 3), \quad f(3) - g(3) = \ln 5 > 0.$$

El recinto queda limitado además por las rectas verticales $x = 1$ y $x = 3$. Su área es

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \left(\ln(x+2) - \frac{x-3}{2} \right) dx \\ &= \left[(x+2) \ln(x+2) - (x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} \right]_1^3 \\ &= \boxed{5 \ln 5 - 3 \ln 3 - 1}. \end{aligned}$$



Ejercicio 5

Escribimos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La condición de conmutar con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es $AX = XA$. Al desarrollar ambos productos se obtiene $a = d$ y $c = -b$. La traza vale 1, así que $a + d = 1$ implica $a = d = 1/2$. La condición del determinante queda

$$1 = ad - bc = \frac{1}{4} + b^2,$$

de donde $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $c = -b$. Las dos matrices son

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right).$$

Ejercicio 6

De $X^t A = B^t$, al transponer ambos miembros, resulta $A^t X = B$. La matriz de coeficientes es, por tanto,

$$A^t = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m & 2m^2-1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 2m-1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $-2(m-1)^2(m+2)$. Si $m \neq 1, -2$, es distinto de cero y el sistema es compatible determinado. Para $m = -2$, la reducción da $\text{rg}(A^t) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$ (aparece una fila $0 = 1$); es incompatible. Para $m = 1$, las tres ecuaciones se reducen a $x + y + z = 1$, de modo que $\text{rg}(A^t) = \text{rg}(A^*) = 1 < 3$: es compatible indeterminado.

Ejercicio 7

La recta dada se parametriza como $(x, y, z) = (2-t, 2+3t, 1+t)$. Los puntos de ella equidistantes de los planos $x = 0$ e $y = 0$ satisfacen

$$|2-t| = |2+3t|.$$

Resolviendo las dos posibilidades de los valores absolutos, $2-t = 2+3t$ o $2-t = -(2+3t)$, se obtiene $t = 0$ o $t = -2$. Los puntos son $(2, 2, 1)$ y $(4, -4, -1)$. La intersección de los planos es el eje Z , de ecuaciones $x = 0, y = 0$. La recta r no lo corta: si $x = 0$, entonces $t = 2$ y $y = 8 \neq 0$. Además, su vector director $(-1, 3, 1)$ no es proporcional a $(0, 0, 1)$, director del eje. Por tanto, son rectas albeadas.

Ejercicio 8

Los vectores que forman el ángulo en A son

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 0, 2) - (1, 1, 0) = (0, -1, 2), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 2, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 1, 1).$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3, -2, -1), \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 4 + 1} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}.$$

Para el coseno usamos el producto escalar:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{15}}}.$$