

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Determina la matriz A que verifica la ecuación $AB + A = 2B^t$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y } B^t \text{ representa la matriz traspuesta de B.}$$

Solución:

$$AB + A = 2B^t$$

$$A(B + I) = 2B^t$$

$$\text{Si existe } (B + I)^{-1} \text{ entonces } A = 2B^t(B + I)^{-1}$$

$$B + I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \quad \text{luego } \exists (B + I)^{-1}$$

Calculemos la matriz inversa de $(B + I)$

$$B + I = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (B + I)^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ luego, } B^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, calculemos la matriz A, $A = 2B^t(B + I)^{-1}$

$$\begin{aligned} A &= 2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{1}{4} - 0 \cdot 0 & 3 \cdot \frac{1}{12} - 0 \cdot \frac{1}{3} \\ -1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 0 & -1 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{3} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{12} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{12} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12} + \frac{8}{12} \end{pmatrix} = \\ &= 2 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{12} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{4} & \frac{6}{12} \\ -\frac{2}{4} & \frac{14}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Una destilería produce dos tipos de whisky blend mezclando sólo dos maltas destiladas distintas, A y B. El primero tiene un 70% de malta A y se vende a 12€/litro, mientras que el segundo tiene un 50% de dicha malta y se vende a 16 €/litro. La disponibilidad de las maltas A y B son 132 y 90 litros, respectivamente. ¿Cuántos litros de cada whisky debe producir la destilería para maximizar sus ingresos, sabiendo que la demanda del segundo whisky nunca supera a la del primero en más del 80%? ¿Cuáles serían en este caso los ingresos de la destilería?

Solución:

Utilizamos las incógnitas:

x = litros del whisky del tipo 1

y = litros del whisky del tipo 2

De los datos del problema podemos sacar la siguiente tabla:

	Malta		Venta
	A	B	
Tipo 1	70%	30%	12 €/l
Tipo 2	50%	5%	16 €/l
restricciones	132 l	90 l	

Los ingresos serían: $12x + 16y$

Las restricciones son:

por la malta A: $0.7x + 0.5y \leq 132$

por la malta B: $0.3x + 0.5y \leq 90$

la demanda del 2º whisky no supera a la del 1º en más de 80%: $y \leq 1.8x$

El problema a resolver es:

maximizar $z = 12x + 16y$

s.a.
$$\begin{cases} 0.7x + 0.5y \leq 132 \\ 0.3x + 0.5y \leq 90 \\ y \leq 1.8x \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos para representar las restricciones

$0.7x + 0.5y \leq 132$

$0.3x + 0.5y \leq 90$

$y \leq 1.8x$

$0.7x + 0.5y = 132$

$0.3x + 0.5y = 90$

$y = 1.8x$

x	y
0	264
1320	0
7	

x	y
0	180
300	0

x	y
0	0
100	180

¿(0,0) cumple?

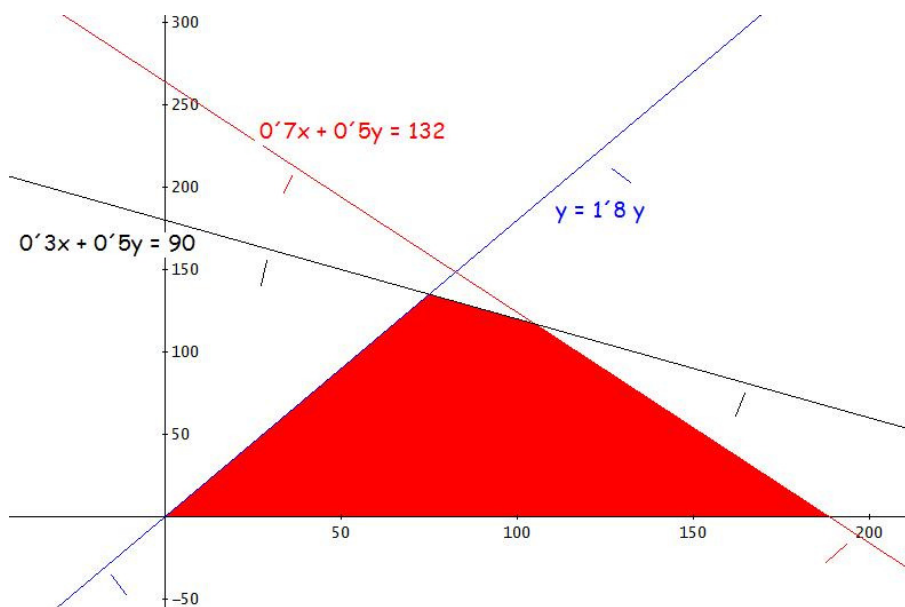
¿(0,0) cumple?

¿(100,0) cumple?

$0.7 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 \leq 132$ sí

$0.3 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 \leq 90$ sí

$0 \leq 1.8 \cdot 100$ sí



Debemos calcular los siguientes puntos de corte,

$$\begin{cases} 0.3x + 0.5y = 90 \\ y = 1.8x \end{cases} \quad 0.3x + 0.5 \cdot 1.8x = 90 \rightarrow 0.3x + 0.9x = 90 \rightarrow 1.2x = 90 \rightarrow x = \frac{90}{1.2} = 75$$

$$\rightarrow y = 1.8 \cdot 75 = 135 \rightarrow (75, 135)$$

$$\begin{cases} 0.7x + 0.5y = 132 \\ 0.3x + 0.5y = 90 \end{cases}$$

$$1^a - 2^a; \quad 0.4x = 42 \rightarrow x = \frac{42}{0.4} = 105$$

sustituyendo en la 2ª,

$$0.3 \cdot 105 + 0.5y = 90$$

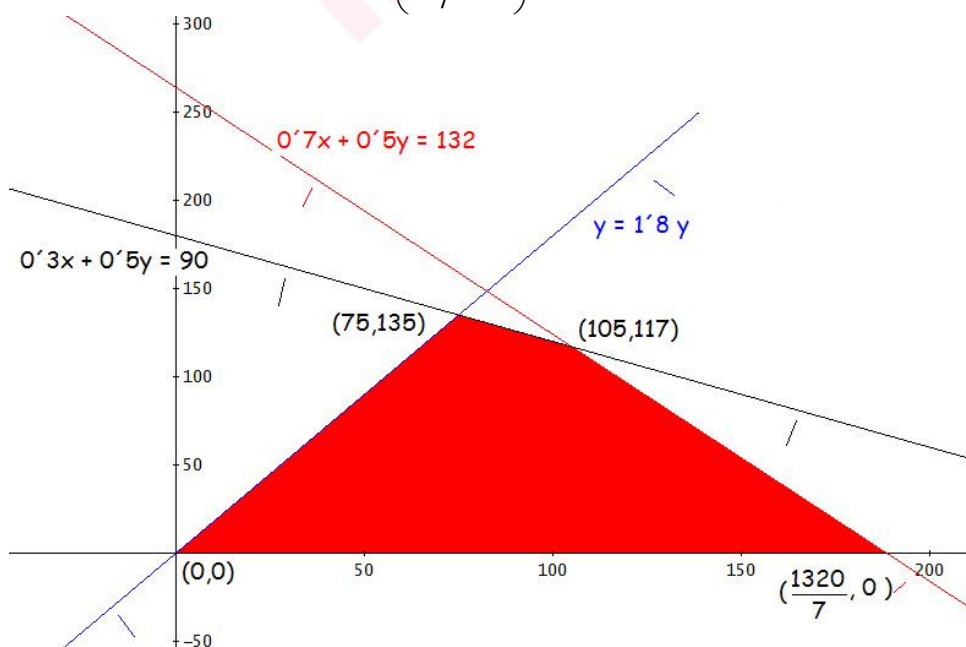
$$31.5 + 0.5y = 90$$

$$0.5y = 58.5$$

$$y = \frac{58.5}{0.5} = 117 \rightarrow (105, 117)$$

La región factible está limitada por los puntos

$$(0, 0), (75, 135), (105, 117) \text{ y } \left(\frac{1320}{7}, 0\right)$$



Sabemos que la función que queremos maximizar alcanzará su máximo en los extremos de la región factible.

(x, y)	$z = 12x + 16y$
$(0,0)$	$12 \cdot 0 + 16 \cdot 0 = 0$
$(75,135)$	$12 \cdot 75 + 16 \cdot 135 = 3060$
$(105,117)$	$12 \cdot 105 + 16 \cdot 117 = 3132$ <i>máximo</i>
$\left(\frac{1320}{7}, 0\right)$	$12 \cdot \frac{1320}{7} + 16 \cdot 0 = 2262\frac{8}{7}$

El máximo se alcanza en el punto $(105,117)$. Por lo que para maximizar sus ingresos la destilería debe producir 105 l del whisky del primer tipo y 117 l del segundo tipo.

Con esta producción los ingresos serían de 3132 €.

Tu Profe al Rescate

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. a) Determina el valor de a para que la función sea continua en $x = -1$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + a & x < -1 \\ a x + 2 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{2x-11}{x-3} & x \geq 1 \end{cases}$$

b) Estudia la continuidad de la función anterior para $a = 0$.

c) Halla la integral entre -2 y 2 de la función $f(x) = x^3 - 2$.

Solución:

a) ¿ a ? para que f sea continua en $x = -1$

1) ¿Existe $f(-1)$?

$f(-1) = a(-1) + 2 = 2 - a$, por lo tanto existe $f(-1)$.

2) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x + a) = -3 + a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + 2) = -a + 2 \end{cases} \quad \text{para que exista } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ debe ser}$$

$$-3 + a = -a + 2; \quad a + a = 2 + 3; \quad 2a = 5; \quad a = \frac{5}{2}$$

Para que exista el límite $a = \frac{5}{2}$.

Para este valor de a se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad f(-1) = 2 - \frac{5}{2} = \frac{-1}{2} \\ 2) \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{-1}{2} \\ 3) \quad f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \end{array} \right\} \text{ luego para } a = \frac{5}{2} \text{ } f(x) \text{ es continua en } x = -1.$$

b) $a = 0$

$$\text{Para } a = 0 \text{ la función es: } f(x) = \begin{cases} 3x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{2x-11}{x-3} & x \geq 1 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad de esta función.

Para $x < -1$ $f(x) = 3x$, función polinómica, luego continua.

Para $-1 < x < 1$ $f(x) = 2$, función constante, luego continua.

Para $x > 1$ $f(x) = \frac{2x-11}{x-3}$, función racional, es continua excepto en $x = 3$ (valor que anula el denominador)

Veamos en los cambios de definición de la función,

$x = -1$

$$1) f(-1) = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 3x = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2 = 2 \end{cases}$$

como los límites laterales son distintos, no existe el límite.

$f(x)$ no es continua en $x = -1$. Por existir los límites laterales la discontinuidad es de salto finito.

$x = 1$

$$1) \quad f(1) = \frac{2 \cdot 1 - 11}{1 - 3} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 11}{x - 3} = \frac{2 - 11}{1 - 3} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

como los límites laterales son distintos, no existe el límite.

$f(x)$ no es continua en $x = 1$. Por existir los límites laterales la discontinuidad es de salto finito.

Veamos el tipo de discontinuidad en $x = 3$,

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 11}{x - 3} = \frac{2 \cdot 3 - 11}{3 - 3} = \frac{-5}{0} = \infty$$

discontinuidad de salto infinito.

En resumen, para $a = 0$, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1, 3\}$

en $x = -1$ y $x = 1$ presenta una discontinuidad de salto finito

y en $x = 3$ presenta una discontinuidad de salto infinito.

c)

$$\int_{-2}^2 (x^3 - 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x \right]_{-2}^2 = \left(\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2 \cdot (-2) \right) = (4 - 4) - (4 + 4) = -8$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Un estudio revela que el 10% de los oyentes de radio sintoniza a diario las cadenas Music y Rhythm, que un 35% sintoniza a diario con Music y que el 55% de los oyentes no escucha ninguna de las dos emisoras. Obtén:

- La probabilidad de que un oyente elegido al azar sintonice la cadena Rhythm.
- La probabilidad de que un oyente elegido al azar sintonice la cadena Rhythm pero no la Music.
- La probabilidad de que un oyente, del que sabemos que escucha Rhythm, escuche Music.

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos: M = oyente sintoniza Music; R = oyente sintoniza Thym

De los datos del problema obtenemos las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} \text{el 10\% de los oyentes de radio sintoniza a diario las cadenas Music y Rhythm} & p(M \cap R) = 0.1 \\ \text{un 35\% sintoniza a diario con Music} & p(M) = 0.35 \\ \text{el 55\% de los oyentes no escucha ninguna de las dos emisoras} & p(\overline{M \cup R}) = 0.55 \end{aligned}$$

- a) Probabilidad de que un oyente elegido al azar sintonice la cadena Rhythm, $p(R)$.

$$p(\overline{M \cup R}) = 0.55 \rightarrow p(M \cup R) = 1 - 0.55 = 0.45$$

$$\text{Por otro lado, } p(M \cup R) = p(M) + p(R) - p(M \cap R)$$

Sustituyendo los valores conocidos,

$$0.45 = 0.35 + p(R) - 0.1;$$

$$p(R) = 0.45 - 0.35 + 0.1 = 0.2$$

- b) Probabilidad de que un oyente elegido al azar sintonice la cadena Rhythm pero no la Music, $p(R \cap \overline{M})$

Llamando E al suceso seguro y Φ al suceso imposible,

$$R = R \cap E = R \cap (M \cup \overline{M}) = (R \cap M) \cup (R \cap \overline{M})$$

$$\text{como } (R \cap M) \cap (R \cap \overline{M}) = R \cap M \cap \overline{M} = R \cap \Phi = \Phi$$

$$p(R) = p[(R \cap M) \cup (R \cap \overline{M})] = p(R \cap M) + p(R \cap \overline{M})$$

Sustituyendo los valores conocidos,

$$0.2 = 0.1 + p(R \cap \overline{M}) \rightarrow p(R \cap \overline{M}) = 0.2 - 0.1 = 0.1$$

- c) Probabilidad de que un oyente, del que sabemos que escucha Rhythm, escuche Music, $p(M/R)$

$$p(M/R) = \frac{p(M \cap R)}{p(R)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. En el primer curso de bachillerato de un instituto hay matriculados un total de 65 alumnos divididos en tres grupos: A, B y C. Comen en el centro 42 de ellos, que corresponden a la mitad de los del grupo A, las cuatro quintas partes de los del B y las dos terceras partes de los del C. A una salida fuera del centro acudieron las tres cuartas partes de los alumnos del grupo A, todos los del B y las dos terceras partes de los del C, sumando en total 52 estudiantes. ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo?

Solución:

Utilizamos las siguientes incógnitas:

x = número de alumnos en el grupo A

y = número de alumnos en el grupo B

z = número de alumnos en el grupo C

Del enunciado del problema obtenemos las siguientes ecuaciones,

Hay matriculados en total 65 alumnos: $x + y + z = 65$

Comen en el centro 42, corresponden a la mitad del A, 4/5 del B y 2/3 de C: $\frac{1}{2}x + \frac{4}{5}y + \frac{2}{3}z = 42$

A la salida acuden $\frac{3}{4}$ del A, todo B y $\frac{2}{3}$ del C, siendo 52: $\frac{3}{4}x + y + \frac{2}{3}z = 52$

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x + y + z = 65 \\ \frac{1}{2}x + \frac{4}{5}y + \frac{2}{3}z = 42 \\ \frac{3}{4}x + y + \frac{2}{3}z = 52 \end{cases} \quad \text{operando} \quad \begin{cases} x + y + z = 65 \\ 15x + 24y + 20z = 1260 \\ 9x + 12y + 8z = 624 \end{cases}$$

Lo resolvemos por Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 15 & 24 & 20 & 1260 \\ 9 & 12 & 8 & 624 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} F_2 - 15F_1 \\ F_3 - 9F_1 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 0 & 9 & 5 & 285 \\ 0 & 3 & -1 & 39 \end{array} \right)$$

intercambiamos la segunda y tercera fila,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 0 & 3 & -1 & 39 \\ 0 & 9 & 5 & 285 \end{array} \right) \quad F_3 - 3F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 0 & 3 & -1 & 39 \\ 0 & 0 & 8 & 168 \end{array} \right)$$

$$\text{de } F_3: 8z = 168 \rightarrow z = \frac{168}{8} = 21$$

$$\text{de } F_2: 3y - z = 39$$

$$3y - 21 = 39$$

$$3y = 60$$

$$y = \frac{60}{3} = 20$$

$$\text{de } F_1: x + y + z = 65$$

$$x + 20 + 21 = 65$$

$$x = 65 - 41$$

$$x = 24$$

Solución: hay 24 alumnos en el grupo A, 20 en el B y 21 en el C.

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, se pide

- Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
- Ecuación de sus asíntotas.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos relativos.
- Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

Solución:

a) *Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.*

$$x^2 + 1 = 0; \quad x^2 = -1 \quad \text{no tiene soluciones reales por lo tanto,} \quad \text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{2 \cdot 0}{0^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow (0,0)$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = \frac{2x}{x^2 + 1} \rightarrow 0 = 2x \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$$

Por lo tanto el punto de corte con los ejes coordenados es $(0,0)$

b) *Ecuación de sus asíntotas.*

- asíntotas verticales

Como el dominio de la función son todos los números reales, no tiene asíntotas verticales.

- asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

$$\text{de igual manera} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

la asíntota horizontal será $y = 0$.

-asíntota oblicua

$\text{grd}(\text{numerador}) - \text{grd}(\text{denominador}) = 1 - 2 = -1$, como no es 1, no hay asíntota oblicua.

c) *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

$$y' = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

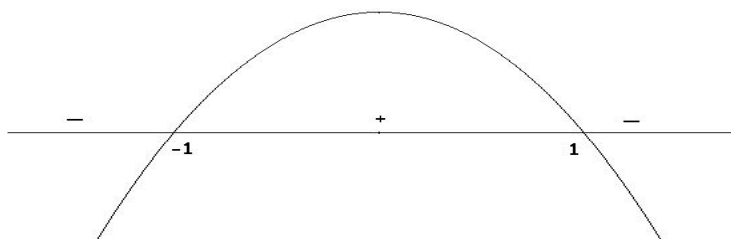
estudiemos el signo de y' , para ello buscamos las raíces del numerador y denominador

$$2 - 2x^2 = 0 \rightarrow 2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$(x^2 + 1)^2 = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{no tiene soluciones reales}$$

Como el denominador de y' es una expresión al cuadrado siempre será positivo; el signo de y' sólo depende del numerador.

Gráficamente el polinomio del numerador es una parábola como sigue ($a < 0$)



Por lo tanto,

f es creciente en $(-1, 1)$ y

f es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) Máximos y mínimos relativos.

Del estudio realizado en el apartado anterior se deduce que

en $x = -1$ hay un mínimo $f(-1) = \frac{2(-1)}{(-1)^2 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$

Mínimo relativo en $(-1, -1)$

en $x = 1$ hay un máximo $f(1) = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} = \frac{2}{2} = 1$

Máximo relativo en $(1, 1)$

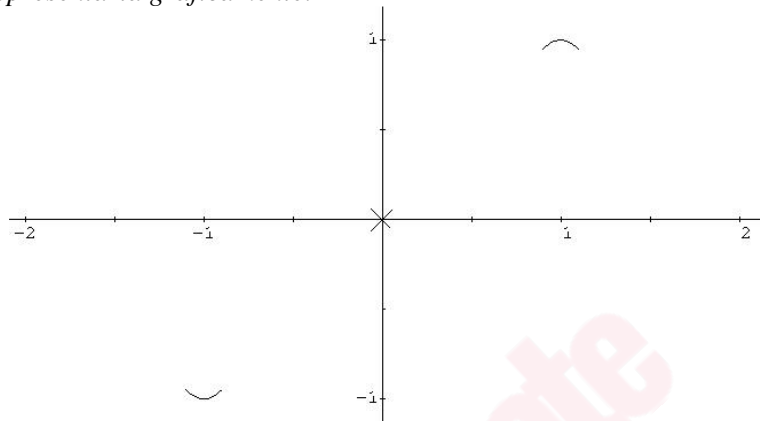
e) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

Marcamos en los ejes coordenados:

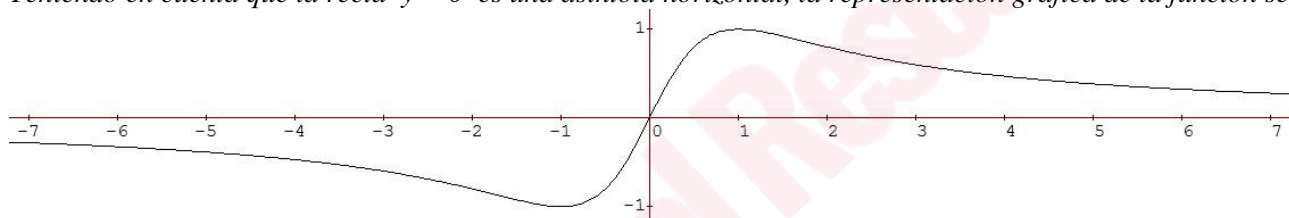
el punto de corte $(0,0)$,

el mínimo relativo y

el máximo relativo



Teniendo en cuenta que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, la representación gráfica de la función será:



esta gráfica cumple los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos.

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. El dinero en efectivo, en euros, de una oficina durante las seis horas que permanece la caja abierta al público viene dada por la expresión $C(t) = 2000 - 234t + 27t^2$, siendo t el tiempo en horas transcurrido desde la apertura. Determina:

- a) ¿En qué momento hay más dinero en efectivo y cuánto?
 b) ¿En qué momento hay menos dinero en efectivo y cuánto?

Justifica que son máximo y mínimo respectivamente.

Solución:

Como la variable t representa el tiempo transcurrido desde la apertura y la oficina está abierta 6 horas, $t \in [0, 6]$

$C(t)$ es una función polinómica luego es continua y derivable en $\mathbb{R}$ y en particular en el intervalo cerrado $[0, 6]$ en que está definida. Por ser continua y derivable en un intervalo cerrado sabemos que sus extremos los alcanza en los extremos del intervalo cerrado o en los puntos intermedios que sean extremos relativos de la función.

Obtenemos sus extremos relativos,

$$C(t) = 2000 - 234t + 27t^2$$

$$C'(t) = -234 + 54t$$

$$-234 + 54t = 0 \quad t = \frac{234}{54} = \frac{13}{3} = 4\text{'}33\text{''}3\text{''}...$$

$$t = \frac{13}{3} \rightarrow C\left(\frac{13}{3}\right) = 2000 - 234 \cdot \frac{13}{3} + 27 \left(\frac{13}{3}\right)^2 = 2000 - 1014 + 507 = 1493$$

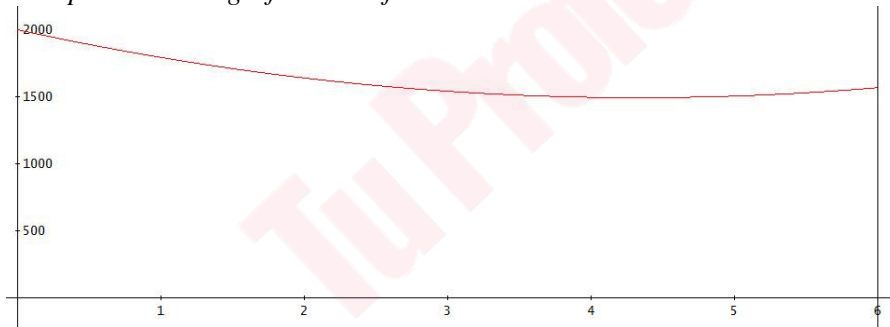
$C(t)$ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de t^2 positivo, por lo tanto el extremo es un mínimo relativo, que además se alcanza dentro del intervalo $[0, 6]$.

$$\text{Mínimo relativo en } \left(\frac{13}{3}, 1493\right)$$

Calculemos los valores de la función en los extremos del intervalo $[0, 6]$

$t = 0, \quad C(0) = 2000$	$(0, 2000)$
$t = 6, \quad C(6) = 2000 - 234 \cdot 6 + 27 \cdot 6^2 = 1568$	$(6, 1568)$

La representación gráfica de la función sería:



a) Hay más dinero en efectivo en el momento de abrir.

Hay 2000 €

b) Hay menos dinero en efectivo al cabo de 4 h. y 20 min., $\left(\frac{13}{3}h\right)$, de abrir. Hay 1493 €

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Dados dos sucesos aleatorios independientes se sabe que la probabilidad de que ocurran los dos simultáneamente es $3/25$ y la de que ocurra al menos uno de los dos es $17/25$. Calcula la probabilidad de cada uno de los dos sucesos.

Solución:

Sean A y B los sucesos aleatorios. Sabemos que,

la probabilidad de que ocurran los dos simultáneamente es $3/25$, $p(A \cap B) = \frac{3}{25}$

la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos es $17/25$ $p(A \cup B) = \frac{17}{25}$

Busquemos una relación entre las probabilidades conocidas y las de los sucesos A y B .

Como los sucesos son independientes

$$p(A/B) = p(A) \quad \text{y} \quad p(B/A) = p(B)$$

$$\text{como } p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \rightarrow \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A) \rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

$$\text{Por otro lado sabemos que } p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Podemos plantear el siguiente sistema,

$$\begin{cases} p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{17}{25} = p(A) + p(B) - \frac{3}{25} \\ \frac{3}{25} = p(A) \cdot p(B) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{20}{25} = p(A) + p(B) \\ \frac{3}{25} = p(A) \cdot p(B) \end{cases}$$

$$\text{de 1ª, } p(A) = \frac{20}{25} - p(B)$$

$$\text{sustituyendo en la 2ª, } \frac{3}{25} = \left[\frac{20}{25} - p(B) \right] \cdot p(B)$$

$$\frac{3}{25} = \frac{20}{25} p(B) - [p(B)]^2$$

$$[p(B)]^2 - \frac{20}{25} p(B) + \frac{3}{25} = 0$$

$$p(B) = \frac{\frac{20}{25} \pm \sqrt{\left(-\frac{20}{25}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{3}{25}}}{2 \cdot 1} = \frac{\frac{20}{25} \pm \sqrt{\frac{400}{625} - \frac{12}{25}}}{2} = \frac{\frac{20}{25} \pm \sqrt{\frac{400}{625} - \frac{300}{625}}}{2} = \frac{\frac{20}{25} \pm \sqrt{\frac{100}{625}}}{2} = \frac{\frac{20}{25} \pm \frac{10}{25}}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\frac{20}{25} + \frac{10}{25}}{2} = \frac{\frac{30}{25}}{2} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} \\ \frac{\frac{20}{25} - \frac{10}{25}}{2} = \frac{\frac{10}{25}}{2} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\text{Sí } p(B) = \frac{3}{5} \rightarrow p(A) = \frac{20}{25} - \frac{3}{5} = \frac{20-15}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Sí } p(B) = \frac{1}{5} \rightarrow p(A) = \frac{20}{25} - \frac{1}{5} = \frac{20-5}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Por lo tanto las probabilidades de los dos sucesos pueden ser,

$$1^a) \quad p(A) = \frac{1}{5} \quad y \quad p(B) = \frac{3}{5}$$

o

$$2^a) \quad p(A) = \frac{3}{5} \quad y \quad p(B) = \frac{1}{5}$$

Tu Profe al Rescate