

Se desarrollan las dos opciones completas. En la prueba se debe contestar una opción entera.

Opción A · Ejercicio A.1 - Sistema de cubiertos

Sean t , c y s los números de tenedores, cuchillos y cucharas. Traducimos las condiciones a ecuaciones:

$$\begin{cases} t - c = 2s + 10, \\ 2c + 30 = 2t - 3s, \\ t + c + s = 50. \end{cases}$$

De la primera, $t - c = 2s + 10$. Al sustituir $t - c$ en la segunda,

$$2(t - c) - 3s = 30 \implies 2(2s + 10) - 3s = 30 \implies s = 10.$$

Entonces $t - c = 30$, y la suma total da $t + c = 40$. Resolviendo estas dos ecuaciones,

$$t = 35, \quad c = 5.$$

El número de juegos completos está limitado por la cantidad menor de los tres cubiertos, que son los cuchillos.

Conclusión. Hay 10 cucharas y 35 tenedores, y se pueden formar 5 juegos completos.

Opción A · Ejercicio A.2 - Función definida a trozos

La función es

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x < 0, \\ \sqrt{x+1}, & x \geq 0. \end{cases}$$

a) Paridad y continuidad

Para $x \geq 0$, $f(-x) = \sqrt{1+x} = \sqrt{x+1} = f(x)$; la misma igualdad se obtiene si $x < 0$. Por tanto, la función es par. Las raíces están definidas en sus respectivos tramos, así que el dominio es $\mathbb{R}$.

En $x = 0$, comparamos los límites laterales y el valor:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \quad f(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Coinciden, y en el resto de cada tramo las expresiones son continuas. **Conclusión.** f es par y continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Derivabilidad y teorema de Rolle

En cada tramo derivamos usando la regla de la cadena:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}, & x < 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, & x > 0. \end{cases}$$

Las derivadas laterales en 0 son

$$f'_-(0) = -\frac{1}{2}, \quad f'_+(0) = \frac{1}{2}.$$

Como no coinciden, la función no es derivable en 0, aunque sí lo es en los demás puntos de su dominio.

Para aplicar Rolle en $[-2, 2]$, la función debe ser continua en el intervalo cerrado, derivable en el intervalo abierto y tener valores iguales en los extremos. Se cumplen la continuidad y la igualdad $f(-2) = f(2) = \sqrt{3}$, pero falla la derivabilidad en $x = 0 \in (-2, 2)$. **Conclusión.** No se puede aplicar el teorema de Rolle en $[-2, 2]$.

c) Área entre la gráfica y $y = \sqrt{2}$

Los puntos de corte se obtienen resolviendo $f(x) = \sqrt{2}$ en cada tramo:

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{2} \ (x < 0) \implies x = -1, \quad \sqrt{x+1} = \sqrt{2} \ (x \geq 0) \implies x = 1.$$

En $[-1, 1]$, la recta horizontal está por encima de la gráfica. Además, f es par, así que calculamos el área de $[0, 1]$ y la duplicamos:

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^1 (\sqrt{2} - \sqrt{x+1}) dx \\ &= 2 \left[\sqrt{2}x - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \right) = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Conclusión. El área encerrada es $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$ unidades cuadradas.

Opción A · Ejercicio A.3 - Rayo láser y simetría

a) Incidencia del rayo y ángulo

El rayo parte de $P = (1, 2, 4)$ con dirección

$$\overrightarrow{PO} = O - P = (2, 3, 0) - (1, 2, 4) = (1, 1, -4).$$

Lo expresamos mediante un parámetro $t \geq 0$:

$$r: \quad x = 1 + t, \quad y = 2 + t, \quad z = 4 - 4t.$$

Para hallar el punto de incidencia, sustituimos estas coordenadas en el plano:

$$(1+t) + 2(2+t) + (4-4t) = 1 \implies 9-t = 1 \implies t = 8.$$

Así, el punto de incidencia es $I = (9, 10, -28)$. El ángulo de incidencia se mide entre el rayo y la normal al plano. Un vector normal es $\vec{n} = (1, 2, 1)$, por lo que

$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{PO} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{PO}| |\vec{n}|} = \frac{|1+2-4|}{\sqrt{18}\sqrt{6}} = \frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

Conclusión. $I = (9, 10, -28)$ y $\theta = \arccos\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right) \approx 84,48^\circ$.

b) Punto simétrico respecto del plano

El simétrico de O respecto del plano se obtiene restando dos veces la proyección normal firmada. Para un plano $\vec{n} \cdot X + D = 0$, la fórmula es

$$O' = O - \frac{2(\vec{n} \cdot O + D)}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Aquí $\vec{n} = (1, 2, 1)$, $D = -1$, $\vec{n} \cdot O + D = 2 + 6 - 1 = 7$ y $\|\vec{n}\|^2 = 6$. Por tanto,

$$O' = (2, 3, 0) - \frac{7}{3}(1, 2, 1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}\right).$$

Conclusión. El punto buscado es $P' = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}\right)$.

Opción A · Ejercicio A.4 - Probabilidad

Los cuatro sucesos $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ y $\overline{A} \cap \overline{B}$ forman una partición del espacio muestral.

a) Unión, intersección e independencia

De $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, obtenemos

$$P(A \cap B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12} - \frac{4}{12} = \frac{1}{4}.$$

La unión es la disjunta unión de A con $\overline{A} \cap B$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{7}{12} + \frac{5}{12} = 1.$$

Como $P(A \cap B) = \frac{1}{4} > 0$, los sucesos no son incompatibles. Para comprobar independencia calculamos

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{2}{3}, \quad P(A)P(B) = \frac{7}{12} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{18}.$$

Este producto no es igual a $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. **Conclusión.** $P(A \cup B) = 1$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, y A, B no son incompatibles ni independientes.

b) Probabilidad de C

La probabilidad condicionada satisface $P(A | C) = P(A \cap C)/P(C)$. Si $p = P(C)$, el dato da $P(A \cap C) = p/4$. Aplicando la fórmula de la unión,

$$\begin{aligned} P(A \cup C) &= P(A) + P(C) - P(A \cap C) \\ &= \frac{7}{12} + p - \frac{p}{4} = \frac{7}{12} + \frac{3p}{4}. \end{aligned}$$

Igualemos a $7/8$:

$$\frac{3p}{4} = \frac{7}{8} - \frac{7}{12} = \frac{7}{24} \implies p = \frac{7}{18}.$$

Conclusión. $P(C) = \frac{7}{18}$.

Opción B · Ejercicio B.1 - Sistema matricial

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a+1 & -2 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 3 \\ -1 & a+1 & -2 & 2a \\ 1 & a & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Calculamos el determinante para localizar los valores singulares:

$$\det A = 2a(2a + 1).$$

Si $a \neq 0, -\frac{1}{2}$, entonces $\det A \neq 0$; así $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, y el sistema es compatible determinado.

Caso $a = 0$. Las ecuaciones segunda y tercera tienen coeficientes que, al sumarse, reproducen los de la primera, pero los términos independientes no son compatibles: la primera exige $y = 3$, mientras que la suma de las otras dos da $y = 1$. Por tanto, $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$; el sistema es incompatible.

Caso $a = -\frac{1}{2}$. La tercera ecuación es la opuesta de la segunda, incluidos sus términos independientes, y la primera es independiente. Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$: el sistema es compatible indeterminado. La primera ecuación es $-\frac{1}{2}x + y = 3$; tomando $z = t$, la segunda determina y :

$$x = 2y - 6, \quad -x + \frac{1}{2}y - 2t = -1 \implies y = \frac{14 - 4t}{3}, \quad x = \frac{10 - 8t}{3}.$$

Conclusión. Es SCD si $a \neq 0, -\frac{1}{2}$, SI si $a = 0$ y SCI si $a = -\frac{1}{2}$. Para $a = -\frac{1}{2}$, $(x, y, z) = (\frac{10-8t}{3}, \frac{14-4t}{3}, t)$.

Opción B · Ejercicio B.2 - Función a trozos

a) Dominio, continuidad y derivabilidad

Para $x < 0$, el denominador $x^2 - 2$ se anula en $x = -\sqrt{2}$ (la raíz positiva no pertenece a este tramo). Para $x \geq 0$, $x^2 + 2 > 0$. Por tanto,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}\}.$$

En $x = 0$, ambos trozos tienden a 0, que también es el valor de la función; luego f es continua. Para la derivabilidad comparamos las derivadas laterales:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2 - 2x^2}{(x^2 - 2)^2} = -\frac{1}{2}, \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2(x^2 + 2) - 2x^4}{(x^2 + 2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Como no coinciden, no es derivable en 0; sí lo es en los demás puntos de su dominio.

b) Asíntotas

En $x = -\sqrt{2}$, el numerador no se anula y el denominador tiende a cero. Los límites laterales son

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} f(x) = +\infty,$$

así que $x = -\sqrt{2}$ es una asíntota vertical.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, se usa el primer tramo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 2} = 0,$$

por lo que $y = 0$ es una asíntota horizontal en ese extremo. Para $x \rightarrow +\infty$, usamos el segundo tramo:

$$f(x) - x = \frac{x^3}{x^2 + 2} - x = -\frac{2x}{x^2 + 2} \rightarrow 0.$$

Conclusión. En $+\infty$ la asíntota es la oblicua $y = x$; en $-\infty$, la horizontal $y = 0$.

c) Área con el eje X en $[-1, 0]$

En $[-1, 0]$, el numerador y el denominador de $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$ son ambos no positivos, de modo que $f(x) \geq 0$. El área coincide con la integral:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2 - 2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln |x^2 - 2| \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Conclusión. El área es $\frac{1}{2} \ln 2$ unidades cuadradas.

Opción B · Ejercicio B.3 - Rectas y triángulos

La recta r se escribe en forma paramétrica como

$$r: \quad x = t, \quad y = t, \quad z = 1 + t,$$

con punto $R = (0, 0, 1)$ y vector director $\vec{v} = (1, 1, 1)$. La recta que pasa por A y B tiene

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 2, 4) - (1, 2, 0) = (-3, 0, 4),$$

de modo que $AB: \quad x = 1 - 3s, \quad y = 2, \quad z = 4s$.

a) Posición relativa y distancia

Los vectores directores no son proporcionales. Para comprobar si las rectas son coplanarias, tomamos

$$\overrightarrow{AR} = R - A = (0 - 1, 0 - 2, 1 - 0) = (-1, -2, 1)$$

y calculamos el producto mixto:

$$\vec{u}_{AB} \times \vec{v} = (-3, 0, 4) \times (1, 1, 1) = (-4, 7, -3),$$

$$\overrightarrow{AR} \cdot (\vec{u}_{AB} \times \vec{v}) = (-1, -2, 1) \cdot (-4, 7, -3) = -13 \neq 0.$$

Las rectas no son coplanarias; como tampoco son paralelas, se cruzan. La distancia entre ellas es

$$d = \frac{|\overrightarrow{AR} \cdot (\vec{u}_{AB} \times \vec{v})|}{|\vec{u}_{AB} \times \vec{v}|} = \frac{13}{\sqrt{(-4)^2 + 7^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{74}}.$$

Conclusión. AB y r se cruzan y están separadas una distancia $\frac{13}{\sqrt{74}}$.

b) Posible tercer vértice de un triángulo equilátero

Todo punto de r tiene la forma $C = (t, t, 1 + t)$. Como

$$|AB|^2 = (-3)^2 + 0^2 + 4^2 = 25,$$

un triángulo equilátero exigiría $|AC|^2 = |BC|^2 = 25$. Calculamos:

$$|AC|^2 = (t - 1)^2 + (t - 2)^2 + (t + 1)^2 = 3t^2 - 4t + 6,$$

$$|BC|^2 = (t + 2)^2 + (t - 2)^2 + (t - 3)^2 = 3t^2 - 6t + 17.$$

Para que $AC = BC$, igualamos sus cuadrados:

$$3t^2 - 4t + 6 = 3t^2 - 6t + 17 \implies t = \frac{11}{2}.$$

Pero entonces $|AC|^2 = |BC|^2 = \frac{299}{4} \neq 25$. No se pueden cumplir simultáneamente las tres igualdades que exige un triángulo equilátero. **Conclusión.** No existe ningún punto $C \in r$ que forme con A y B un triángulo equilátero.

c) Recta por A perpendicular a r

Buscamos el punto $H \in r$ tal que $AH \perp r$. Escribimos $H = (t, t, 1+t)$ e imponemos perpendicularidad:

$$\overrightarrow{AH} = H - A = (t-1, t-2, t+1),$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{v} = (t-1) + (t-2) + (t+1) = 3t-2 = 0 \implies t = \frac{2}{3}.$$

Así, $H = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3})$ y una dirección de la recta es $\overrightarrow{AH} = (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$, que se puede simplificar a $(-1, -4, 5)$. La recta paramétrica pedida es

$$s: \quad x = 1 - u, \quad y = 2 - 4u, \quad z = 5u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta pedida es la anterior.

Opción B · Ejercicio B.4 - Distribución normal y binomial

a) Longitud entre 196 m y 202 m

Sea X la longitud desenrollada; $X \sim N(200, 5)$, con media 200 m y desviación típica 5 m. Tipificamos los extremos del intervalo:

$$z_1 = \frac{196 - 200}{5} = -0,8, \quad z_2 = \frac{202 - 200}{5} = 0,4.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P(196 \leq X \leq 202) &= P(-0,8 \leq Z \leq 0,4) \\ &= P(Z \leq 0,4) - P(Z \leq -0,8) \\ &= 0,6554 - (1 - 0,7881) = 0,4435. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad pedida es 0,4435.

b) Dos o más madejas inadmisibles

La longitud de una madeja es inadmisibile si $X < 195$. Tipificando:

$$p = P(X < 195) = P\left(Z < \frac{195 - 200}{5}\right) = P(Z < -1) = 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

Sea Y el número de madejas inadmisibles entre diez. Las extracciones son independientes y tienen la misma probabilidad p , por lo que

$$Y \sim \text{Binomial}(10, 0,1587).$$

"Dos o más" es el complementario de cero o una inadmisibile:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) \\ &= 1 - (1-p)^{10} - \binom{10}{1} p(1-p)^9 \\ &\approx 0,4873. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad de que haya dos o más madejas inadmisibles es aproximadamente 0,4873.