

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Bloque A

Ejercicio 1 · Semejanza de matrices

La igualdad $P^{-1}AP = J$ expresa que A y J son semejantes. Como $\det P = -2 \neq 0$, podemos despejar A multiplicando por P a la izquierda y por P^{-1} a la derecha:

$$A = PJP^{-1}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo las matrices del enunciado,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Para comprobar la identidad de potencias, usamos que $(PJP^{-1})^3 = PJ^3P^{-1}$, pues entre factores consecutivos se simplifica $P^{-1}P = I$. Como J es diagonal,

$$J^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = PJ^3P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 8 & 0 \\ \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad A^3 = PJ^3P^{-1}.$$

Ejercicio 2 · Optimización de ingresos

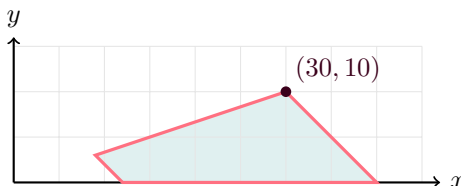
Sean x el número de centros florales e y el de candelabros. Las restricciones del salón y del encargo son

$$12 \leq x + y \leq 40, \quad 0 \leq y \leq \frac{x}{3}, \quad x \geq 0.$$

El ingreso que se desea maximizar es $I(x, y) = 32x + 35y$ euros. Sus vértices factibles son $(12, 0)$, $(9, 3)$, $(30, 10)$ y $(40, 0)$. Como la función objetivo es lineal, el máximo se alcanza en uno de ellos:

(x, y)	$(12, 0)$	$(9, 3)$	$(30, 10)$	$(40, 0)$
$I(x, y)$	384	393	1310	1280

El mayor ingreso corresponde a $(30, 10)$. En efecto, se ocupan las 40 mesas y se alcanza el límite $y = x/3$.



30 centros florales y 10 candelabros; el ingreso máximo es 1310 €.

Bloque B

Ejercicio 3 · Área entre dos gráficas y coste

Los puntos de corte se obtienen igualando las funciones que delimitan la región:

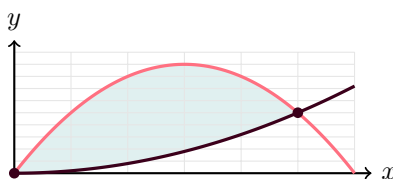
$$-x^2 + 6x = \frac{x^2}{5} \iff -6x^2 + 30x = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = 5.$$

En $0 < x < 5$, $f(x) - g(x) = 6x - \frac{6}{5}x^2 > 0$, de modo que f queda por encima de g . El área, en decámetros cuadrados, es

$$\mathcal{A} = \int_0^5 \left[(-x^2 + 6x) - \frac{x^2}{5} \right] dx = \left[-\frac{2}{5}x^3 + 3x^2 \right]_0^5 = 25 \text{ dam}^2.$$

Como $1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2$, la superficie es 2500 m^2 . A 75 € por metro cuadrado, el coste resulta

$$C = 2500 \cdot 75 = 187500 \text{ €}.$$



$$\mathcal{A} = 25 \text{ dam}^2 = 2500 \text{ m}^2; \quad C = 187500 \text{ €}.$$

Ejercicio 4 · Continuidad, derivabilidad y área

En el punto de unión $x = 1$, las dos ramas de f toman el valor 1:

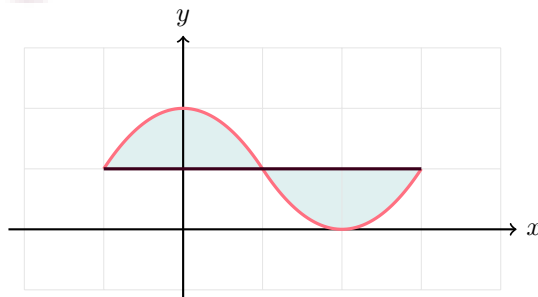
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 - 1^2 = 1, \quad f(1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = (1 - 2)^2 = 1.$$

Por tanto, f es continua. Sus derivadas laterales también coinciden, pues

$$f'_-(1) = (-2x)|_{x=1} = -2, \quad f'_+(1) = 2(x - 2)|_{x=1} = -2;$$

f es derivable en $x = 1$. La función $g(x) = 1$ es constante y, por ello, continua y derivable en todo su dominio $[-1, 3]$. Las curvas se cortan en $x = -1, 1, 3$. Entre -1 y 1 , f está por encima de g ; entre 1 y 3 , g está por encima de f . Así, el área geométrica es

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-1}^1 [(2 - x^2) - 1] dx + \int_1^3 [1 - (x - 2)^2] dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \left[x - \frac{(x - 2)^3}{3} \right]_1^3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$



$$f \text{ es continua y derivable en } x = 1; \quad g \text{ también; } \mathcal{A} = \frac{8}{3}.$$

Bloque C

Ejercicio 5 · Probabilidad condicionada

Sean H el suceso «compra una novela histórica» y F «compra una novela de fantasía». Se conocen $P(H) = 0,45$, $P(F) = 0,40$ y $P(H | F) = 0,30$. Primero calculamos la probabilidad de que compre ambos tipos:

$$P(H \cap F) = P(H | F)P(F) = 0,30 \cdot 0,40 = 0,12.$$

a) Esa intersección es precisamente la probabilidad solicitada: $P(H \cap F) = 0,12$.

b) Por la fórmula de la unión,

$$P(H \cup F) = P(H) + P(F) - P(H \cap F) = 0,45 + 0,40 - 0,12 = 0,73.$$

No comprar ninguna de las dos categorías es el suceso complementario, cuya probabilidad es $1 - 0,73 = 0,27$.

c) Para calcular la probabilidad condicionada a que no compre novelas históricas, usamos

$$P(F | H^c) = \frac{P(F \cap H^c)}{P(H^c)}.$$

Como $P(F \cap H^c) = P(F) - P(H \cap F) = 0,28$ y $P(H^c) = 0,55$,

$$P(F | H^c) = \frac{0,28}{0,55} = \frac{28}{55} \approx 0,5091.$$

a) 0,12;	b) 0,27;	c) $\frac{28}{55} \approx 0,5091$.
----------	----------	-------------------------------------

Ejercicio 6 · Teorema de Bayes

Sean A, B, C los sucesos «la pieza procede de la máquina A, B o C» y D «la pieza es defectuosa». Las probabilidades de fabricación son $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,35$ y $P(C) = 0,40$. El enunciado indica que, agrupando A y C, el 2,05% de sus piezas es defectuoso; para B, la tasa es 1,25%. Por tanto, $P(D | A \cup C) = 0,0205$ y $P(D | B) = 0,0125$. Por probabilidad total,

$$P(D) = 0,65(0,0205) + 0,35(0,0125) = 0,0177,$$

por lo que $P(D^c) = 0,9823$. a) Buscamos la probabilidad de que una pieza no defectuosa proceda de B. La probabilidad conjunta del camino B y D^c es $0,35(1 - 0,0125)$, así que

$$P(B | D^c) = \frac{P(B)P(D^c | B)}{P(D^c)} = \frac{0,35(0,9875)}{0,9823} = \frac{13825}{39292} \approx 0,3519.$$

b) En este apartado se supone además que $P(D | A) = P(D | C)$. La tasa para el conjunto de piezas procedentes de A o C es la media ponderada de esas dos probabilidades; al ser iguales, ambas valen 0,0205. Así, $P(D | A) = 0,0205$. Para invertir la condición y conocer el origen de una pieza defectuosa, aplicamos Bayes:

$$P(A | D) = \frac{P(D | A)P(A)}{P(D)} = \frac{0,0205(0,25)}{0,0177} = \frac{205}{708} \approx 0,2895.$$

$P(B D^c) \approx 0,3519;$	$P(A D) = \frac{205}{708} \approx 0,2895.$
------------------------------	--

Bloque D

Ejercicio 7 · Intervalo de confianza y tamaño muestral

En la muestra, $n = 220$ y 165 pacientes responden positivamente; por tanto, la proporción muestral es $\hat{p} = 165/220 = 0,75$. Para un intervalo de confianza bilateral de una proporción usamos

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el cuantil de la normal estándar que corresponde al nivel de confianza. Para un 97,5%, $z_{0,9875} \approx 2,2414$, y resulta

$$0,75 \pm 2,2414 \sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{220}} = 0,75 \pm 0,0654.$$

El intervalo es aproximadamente (0,6846, 0,8154). Como el 0,70 pertenece al intervalo, los datos son compatibles con que el porcentaje poblacional de respuestas positivas sea del 70%.

Para que el error máximo sea menor que $E = 0,025$ con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, despejamos n de la expresión del margen de error:

$$E = z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \implies n > \frac{z_{0,9875}^2 (0,75)(0,25)}{0,025^2} \approx 1507,17.$$

El tamaño ha de ser entero y la desigualdad estricta; el mínimo que la cumple es $n = 1508$.

$$IC_{97,5\%} \approx (0,6846, 0,8154); \quad n_{\min} = 1508.$$

Ejercicio 8 · Intervalo para una media y precisión

La media de las diez mediciones es

$$\bar{x} = \frac{2,71 + 3,84 + 3,26 + 2,28 + 2,86 + 3,08 + 3,07 + 2,46 + 2,54 + 2,58}{10} = 2,868 \text{ min.}$$

Como la variable es normal y se conoce $\sigma = 0,36$ min, utilizamos el intervalo bilateral para la media con desviación típica conocida:

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Con confianza del 93,5%, $z_{0,9675} \approx 1,8453$. Por tanto,

$$2,868 \pm 1,8453 \frac{0,36}{\sqrt{10}} = 2,868 \pm 0,2101,$$

y el intervalo de confianza es (2,6579, 3,0781) minutos.

Para que el error de estimación sea inferior a 0,05 min, despejamos el tamaño muestral de $E = z_{1-\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$:

$$n > \left(\frac{1,8453(0,36)}{0,05} \right)^2 \approx 176,51.$$

El menor entero que garantiza ese error es 177 repeticiones.

$$IC_{93,5\%} \approx (2,6579, 3,0781) \text{ min}; \quad n_{\min} = 177.$$