

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de septiembre de 2008

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Estudio de una función y cálculo de un área

La función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, pues tanto el polinomio como la exponencial existen para cualquier real. Para estudiar su gráfica calculamos las derivadas primera y segunda: la primera informa del crecimiento y la segunda de la concavidad.

$$f'(x) = e^{-x}(2x - (x^2 + 1)) = -e^{-x}(x - 1)^2.$$

Como $e^{-x} > 0$ y $(x - 1)^2 \geq 0$, se tiene $f'(x) \leq 0$ en todo el dominio. La función es decreciente en $\mathbb{R}$ y presenta tangente horizontal en $x = 1$, sin cambiar allí de sentido de variación. Derivando otra vez,

$$f''(x) = e^{-x}(x - 1)(x - 3).$$

Los posibles puntos de inflexión son $x = 1$ y $x = 3$. El signo de f'' es positivo en $(-\infty, 1)$, negativo en $(1, 3)$ y positivo en $(3, +\infty)$; por tanto, la concavidad cambia en ambos puntos. Sus coordenadas son

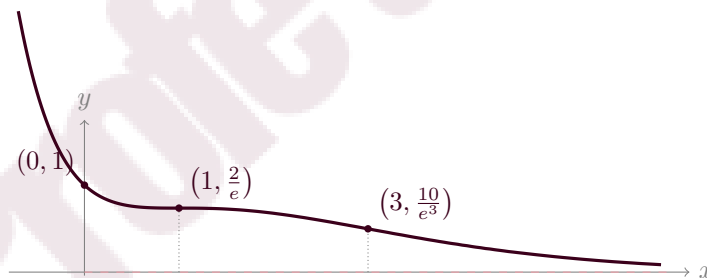
$$f(1) = \frac{2}{e}, \quad f(3) = \frac{10}{e^3}.$$

Para las asíntotas, la función no presenta asíntotas verticales porque su dominio es todo $\mathbb{R}$. En el extremo positivo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(x^2 + 1) = 0,$$

de modo que $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$. En el otro extremo, $e^{-x}(x^2 + 1) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$, por lo que no hay asíntota horizontal allí. Tampoco hay oblicua en $-\infty$: el cociente $f(x)/x$ tiende a $-\infty$, así que no existe una pendiente finita.

La gráfica debe pasar por $(0, 1)$, ser decreciente, tener inflexiones en $(1, 2/e)$ y $(3, 10/e^3)$ y aproximarse al eje OX por arriba cuando $x \rightarrow +\infty$. Esta representación recoge esas características:



Una primitiva de f es $F(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 3)$, ya que al derivarla se obtiene $e^{-x}(x^2 + 1)$. Por tanto,

$$\int_0^1 f(x) dx = [-e^{-x}(x^2 + 2x + 3)]_0^1 = 3 - \frac{6}{e}.$$

Conclusión. La función decrece en todo $\mathbb{R}$, tiene puntos de inflexión en $(1, \frac{2}{e})$ y $(3, \frac{10}{e^3})$ y asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$. Además, $\int_0^1 f(x) dx = 3 - \frac{6}{e}$.

Opción A - Ejercicio 2. Rango e inversa de una matriz con parámetro

Consideramos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Al ser una matriz cuadrada de orden tres, su determinante permite saber cuándo tiene rango tres y cuándo es invertible:

$$\det A = -2(a+1)(a^2 + a - 1).$$

Si el determinante es distinto de cero, el rango es tres. Se anula para $a = -1$ o cuando $a^2 + a - 1 = 0$, cuyas raíces son $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. En esos tres casos el rango no puede ser menor que dos: el menor formado por las filas primera y segunda y las columnas primera y tercera vale

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2a & 1 \end{vmatrix} = 2(1 - a),$$

y es distinto de cero para esos valores del parámetro. Por consiguiente, **Conclusión.** El rango es tres si el determinante no se anula. Para los tres valores que lo anulan, el menor calculado demuestra que el rango es dos:

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3, & a \notin \left\{-1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}, \\ 2, & a \in \left\{-1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}. \end{cases}$$

Una matriz cuadrada es invertible exactamente cuando su determinante es distinto de cero, así que A es invertible para esos mismos valores no excluidos. Para $a = 1$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A_1 = -4 \neq 0.$$

Su inversa es

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al multiplicar esta matriz por A_1 se obtiene la identidad, lo que verifica el resultado. **Conclusión.** La inversa de A para $a = 1$ es la matriz anterior.

Opción A - Ejercicio 3. Lugares geométricos en el espacio

Sean $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 0)$. En el apartado a) buscamos los puntos $R(x, y, z)$ que están a la misma distancia de P y de Q . Igualamos las distancias al cuadrado, lo que evita trabajar con raíces:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = x^2 + (y - 1)^2 + z^2.$$

Al simplificar se obtiene $x + 3z = 5$. Por tanto, el lugar geométrico es un plano, que es el plano mediador del segmento PQ . **Conclusión.** Los puntos equidistantes de P y Q forman el plano $x + 3z - 5 = 0$.

Para el apartado b), expresamos la recta que pasa por P y Q en forma paramétrica. El vector director se obtiene restando las coordenadas: $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1, 0, -3)$.

$$\ell : (x, y, z) = (1, 1, 3) + t(-1, 0, -3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un punto S de esta recta está a distancia $|t| \|\overrightarrow{PQ}\|$ de P y a distancia $|1 - t| \|\overrightarrow{PQ}\|$ de Q . La condición del enunciado se reduce a

$$|t| = 2|1 - t| \implies t^2 = 4(1 - t)^2 \implies 3t^2 - 8t + 4 = 0.$$

Las soluciones son $t = \frac{2}{3}$ y $t = 2$. Sustituyendo en la parametrización,

$$S_1 = \left(\frac{1}{3}, 1, 1\right), \quad S_2 = (-1, 1, -3).$$

Conclusión. Los puntos buscados son $\left(\frac{1}{3}, 1, 1\right)$ y $(-1, 1, -3)$.

Opción A - Ejercicio 4. Perpendicular común a dos rectas

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica a partir de sus ecuaciones continuas:

$$r : (x, y, z) = (-1, 2, 0) + t(1, 2, 3), \quad s : (x, y, z) = (0, 1, 0) + u(2, 3, 4).$$

Buscamos un punto de cada recta tal que el vector que los une sea perpendicular a ambas direcciones. Si $P(t) \in r$ y $Q(u) \in s$, esto equivale a imponer $\overrightarrow{P(t)Q(u)} \cdot (1, 2, 3) = 0$ y $\overrightarrow{P(t)Q(u)} \cdot (2, 3, 4) = 0$. Al desarrollar los productos escalares, las condiciones de perpendicularidad quedan

$$-1 - 14t + 20u = 0, \quad -1 - 20t + 29u = 0.$$

La solución es $t = -\frac{3}{2}$ y $u = -1$, y por tanto

$$P = \left(-\frac{5}{2}, -1, -\frac{9}{2}\right), \quad Q = (-2, -2, -4).$$

En efecto, $Q - P = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$, que es perpendicular a las dos direcciones. La recta perpendicular común debe pasar por P y tener como dirección $Q - P$, que podemos tomar proporcional a $(1, -2, 1)$. En la forma paramétrica pedida:

$$t : (x, y, z) = \left(-\frac{5}{2}, -1, -\frac{9}{2}\right) + \lambda(1, -2, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La perpendicular común a r y s es la recta paramétrica indicada.

Opción B - Ejercicio 1. Integración por partes y cambio de variable

a) Para integrar $x^3 \ln x$ usamos integración por partes, tomando $u = \ln x$ y $dv = x^3 dx$. Así, $du = \frac{dx}{x}$ y $v = \frac{x^4}{4}$:

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

Conclusión. $\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$.

b) Aplicamos el cambio indicado $x = e^t - e^{-t}$. Su derivada es $dx = (e^t + e^{-t}) dt$, y además

$$4 + x^2 = 4 + (e^t - e^{-t})^2 = (e^t + e^{-t})^2.$$

Como $e^t + e^{-t} > 0$, la raíz es $\sqrt{4 + x^2} = e^t + e^{-t}$ y el integrando se simplifica:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}} = \int \frac{(e^t + e^{-t}) dt}{e^t + e^{-t}} = t + C.$$

Deshacemos el cambio con la expresión que proporciona el enunciado, $t = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right)$. La primitiva obtenida, expresada de nuevo en función de x , es

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}} = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right) + C.$$

Conclusión. Esta expresión es una primitiva de la función integrando.

Opción B - Ejercicio 2. Intersección de recta y plano; planos paralelos

La recta se expresa en forma paramétrica como

$$r : (x, y, z) = (1, -1, 0) + t(2, 3, -4), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En el apartado a), sustituimos estas coordenadas en el plano $\pi_1 : x + y + z = 1$:

$$(1 + 2t) + (-1 + 3t) - 4t = 1 \implies t = 1.$$

Por tanto, el punto de intersección es

$$P = (1, -1, 0) + (2, 3, -4) = (3, 2, -4).$$

Conclusión. r corta a π_1 en $P = (3, 2, -4)$.

Los planos paralelos a π_1 tienen la misma normal $(1, 1, 1)$, así que sus ecuaciones son $x + y + z = c$. Sobre la recta, la suma de coordenadas vale t . El punto de corte con el plano $x + y + z = c$ corresponde, por tanto, al parámetro $t = c$. La distancia entre dos puntos de la recta con parámetros t_1, t_2 es $|t_2 - t_1| \|(2, 3, -4)\| = |t_2 - t_1| \sqrt{29}$. Como el segmento entre π_1 y el plano buscado debe medir $\sqrt{29}$ y π_1 corresponde a $t = 1$, imponemos

$$|t - 1| \sqrt{29} = \sqrt{29} \implies t = 0 \text{ o } t = 2.$$

Los valores de la suma $x + y + z$ determinan el término independiente de cada plano. **Conclusión.** Los dos planos posibles son $x + y + z = 0$ y $x + y + z = 2$.

Opción B - Ejercicio 3. Resolución de un sistema por Rouché–Frobenius

Escribimos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema, tomando x, y, z, v como incógnitas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & -6 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -6 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Restamos la primera fila a la segunda y dos veces la primera a la tercera y a la cuarta. Las dos últimas filas quedan nulas o repetidas; al simplificar las filas no nulas y eliminar sus entradas sobre los pivotes se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Hay dos filas no nulas, tanto en la parte de coeficientes como en la ampliada; por ello $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$. Como este rango común es menor que las cuatro incógnitas, Rouché–Frobenius clasifica el sistema como compatible indeterminado. Las ecuaciones resultantes son $x + z = 0$ e $y + \frac{3}{2}v = 2$. Tomando $z = s$ y $v = t$ como parámetros libres,

$$x = -s, \quad y = 2 - \frac{3}{2}t, \quad z = s, \quad v = t, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. El sistema es SCI y sus soluciones son $(x, y, z, v) = (-s, 2 - \frac{3}{2}t, s, t)$, con $s, t \in \mathbb{R}$.

Opción B - Ejercicio 4. Sistema de ecuaciones con billetes

Sean x, y y z los números de billetes de 50, 20 y 10 euros, respectivamente. El número total de billetes, el importe y la relación entre las cantidades se traducen en

$$\begin{cases} x + y + z = 225, \\ 50x + 20y + 10z = 7000, \\ x + z = 2y. \end{cases}$$

La primera y la tercera ecuación dan $3y = 225$, por lo que $y = 75$. Al sustituir en la primera, $x + z = 150$. La ecuación del importe, dividida entre 10, es $5x + 2y + z = 700$; con $y = 75$ queda $5x + z = 550$. Restando $x + z = 150$ obtenemos $4x = 400$, así que $x = 100$ y $z = 50$. **Conclusión.** Se ingresaron 100 billetes de 50 euros, 75 billetes de 20 euros y 50 billetes de 10 euros.