

Septiembre de 2003 · Convocatoria extraordinaria

Resolvemos los ocho problemas para que puedas estudiar el examen completo. En la prueba se elige uno de los ejercicios y, dentro de él, tres problemas.

Ejercicio A · Problema 1

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Valores de m para los que existe A^{-1} , y cálculo de la inversa

Una matriz cuadrada es invertible exactamente cuando su determinante es distinto de cero. Desarrollamos el determinante de A por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A &= 0 - m \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -(m+1) \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -m(-(m+1) + 5) + 3 \\ &= m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3). \end{aligned}$$

Por tanto, $\det A = 0$ cuando $m = 1$ o $m = 3$. Así que A es invertible para

$$m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}.$$

Para calcular la inversa usamos $A^{-1} = \text{adj}(A) / \det A$. La matriz de cofactores es

$$C = \begin{pmatrix} 1 & m-4 & 1 \\ m^2+m+3 & -15 & 5m \\ -m & 3 & -m \end{pmatrix}, \text{adj}(A) = C^T.$$

Luego, para $m \neq 1, 3$,

$$A^{-1} = \frac{1}{(m-1)(m-3)} \begin{pmatrix} 1 & m^2+m+3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{pmatrix}.$$

b) Matriz X cuando $m = 0$

Partimos de la ecuación del enunciado y despejamos X :

$$B - AX = AB \implies AX = B - AB \implies X = A^{-1}(B - AB).$$

Al poner $m = 0$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_0^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & -15 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & -5 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos primero el producto $A_0 B$:

$$A_0 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Después restamos, entrada a entrada:

$$B - A_0 B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por último, multiplicamos por A_0^{-1} :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & -5 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -6 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}}.$$

Ejercicio A - Problema 2

a) Función de coste y dominio

Llamamos x a uno de los lados del rectángulo, medido en metros. El área es 400 m^2 , así que el otro lado, y , cumple

$$xy = 400 \implies y = \frac{400}{x}.$$

Como ambos lados son longitudes, $x > 0$. El perímetro que hay que vallar es

$$P(x) = 2x + 2y = 2x + \frac{800}{x}.$$

Cada metro de valla cuesta **100** euros; por tanto, la función coste es

$$F(x) = 100P(x) = 100 \left(2x + \frac{800}{x} \right) = \boxed{200x + \frac{80000}{x}}, \quad \boxed{\text{Dom}(F) = (0, \infty)}.$$

Asíntotas de la función

Comprobamos primero la posible asíntota vertical en $x = 0$. Como el dominio es $x > 0$, calculamos el límite por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty,$$

así que $x = 0$ es una asíntota vertical. Cuando $x \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - 200x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{80000}{x} = 0,$$

por lo que la asíntota oblicua es $y = 200x$. No hay asíntota horizontal, ya que $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$; el dominio no contiene valores negativos.

b) Valor de x que minimiza el coste

Derivamos la función y buscamos sus puntos críticos dentro del dominio:

$$F'(x) = 200 - \frac{80000}{x^2} = \frac{200(x - 20)(x + 20)}{x^2}.$$

La ecuación $F'(x) = 0$ da $x = 20$ o $x = -20$, pero -20 no pertenece al dominio $x > 0$. Como el único punto crítico del dominio es 20 , probamos un valor a cada lado y evaluamos el signo de la derivada:

Valor de x	0	10	20	30
Sustitución en $F'(x)$	No está definida: $0 \notin \text{Dom}(F)$	$200 - \frac{80000}{10^2} = -600$	$200 - \frac{80000}{20^2} = 0$	$200 - \frac{80000}{30^2} = \frac{1000}{9}$
Signo	Fuera del dominio	—	0	+
Comportamiento	No es extremo: $0 \notin \text{Dom}(F)$	Decrece en (0, 20)	Punto crítico	Crece en (20, ∞)

La función pasa de decrecer a crecer, de modo que $x = 20$ da el mínimo. El otro lado vale $400/20 = 20$ m: la parcela debe ser cuadrada. El coste mínimo es

$$F(20) = 200 \cdot 20 + \frac{80000}{20} = 4000 + 4000 = \boxed{8000 \text{ euros}}.$$

Ejercicio A - Problema 3

Denotamos por x la nota de Filosofía y por y la de Literatura. Completamos la tabla con los cuadrados y los productos para que se vea de dónde salen las sumas:

Alumno i	1	2	3	4	5	6	7	Suma
Filosofía x_i	3	6	7	5	8	4	8	41
Literatura y_i	5	8	7	7	9	5	5	46
x_i^2	9	36	49	25	64	16	64	263
y_i^2	25	64	49	49	81	25	25	318
$x_i y_i$	15	48	49	35	72	20	40	279

a) Medias y desviaciones típicas

La media es la suma de las notas dividida por el número de alumnos:

$$\bar{x} = \frac{41}{7} \approx 5,857, \quad \bar{y} = \frac{46}{7} \approx 6,571.$$

Tomamos la desviación típica poblacional, es decir, dividimos entre los siete alumnos. Para Filosofía:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \frac{1}{7} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum x_i^2}{7} - \bar{x}^2 \\ &= \frac{263}{7} - \left(\frac{41}{7}\right)^2 = \frac{160}{49}, \quad \sigma_x = \frac{4\sqrt{10}}{7} \approx 1,807.\end{aligned}$$

Para Literatura:

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= \frac{1}{7} \sum (y_i - \bar{y})^2 = \frac{\sum y_i^2}{7} - \bar{y}^2 \\ &= \frac{318}{7} - \left(\frac{46}{7}\right)^2 = \frac{110}{49}, \quad \sigma_y = \frac{\sqrt{110}}{7} \approx 1,498.\end{aligned}$$

b) Coeficiente de correlación y significado

Usamos el coeficiente de Pearson. Calculamos primero las sumas centradas:

$$\begin{aligned}S_{xx} &= \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 263 - \frac{41^2}{7} = \frac{160}{7}, \\ S_{yy} &= \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = 318 - \frac{46^2}{7} = \frac{110}{7}, \\ S_{xy} &= \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n} = 279 - \frac{41 \cdot 46}{7} = \frac{67}{7}.\end{aligned}$$

Sustituimos en $r = S_{xy} / \sqrt{S_{xx} S_{yy}}$:

$$r = \frac{67/7}{\sqrt{(160/7)(110/7)}} = \frac{67}{\sqrt{17600}} = \frac{67\sqrt{11}}{440} \approx \boxed{0,505}.$$

c) Por qué al quitar la última pareja la correlación aumenta hasta 0.9

La pareja que se elimina es (8, 5). Al retirarla quedan seis alumnos y las sumas pasan a ser $\sum x_i = 33$, $\sum y_i = 41$, $\sum x_i^2 = 199$, $\sum y_i^2 = 293$, $\sum x_i y_i = 239$. En el apartado anterior obtuvimos $r \approx 0,505$: la relación es positiva y moderada, pero no muy marcada.

$$\sum x_i = 33, \sum y_i = 41, \sum x_i^2 = 199, \sum y_i^2 = 293, \sum x_i y_i = 239.$$

Con estos seis datos:

$$S_{xx} = 199 - \frac{33^2}{6} = \frac{35}{2}, S_{yy} = 293 - \frac{41^2}{6} = \frac{77}{6}, S_{xy} = 239 - \frac{33 \cdot 41}{6} = \frac{27}{2}.$$

Por tanto,

$$r_6 = \frac{27/2}{\sqrt{(35/2)(77/6)}} = \sqrt{\frac{2187}{2695}} \approx \boxed{0,901 \approx 0,9}.$$

La correlación con los siete alumnos es aproximadamente 0,505, mientras que con los seis primeros es 0,901, que se redondea a 0,9. La última pareja combina un 8 en Filosofía, por encima de la media, con un 5 en Literatura, por debajo de la media. Sus desviaciones respecto a las medias de los siete datos tienen signos opuestos:

$$\left(8 - \frac{41}{7}\right) \left(5 - \frac{46}{7}\right) = \frac{15}{7} \left(-\frac{11}{7}\right) = -\frac{165}{49} < 0.$$

Como ese producto es negativo, la pareja debilita la asociación positiva. Al quitarla, los seis puntos restantes siguen una tendencia ascendente más uniforme y la correlación sube.

Ejercicio A - Problema 4

El punto es $P = (3, 2, 3)$ y la recta es la intersección de los planos

$$\pi_1 : x + 3y - 4z = 0, \quad \pi_2 : x + 2y - 2z = 1.$$

a) Distancia del punto a la recta

Para escribir la recta en forma paramétrica, restamos las ecuaciones: $y - 2z = -1$.

Tomamos $z = t$; entonces $y = -1 + 2t$ y, al sustituir en el segundo plano, $x = 3 - 2t$. Así,

$$r : \begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad Q = (3, -1, 0), \quad \vec{v} = (-2, 2, 1). \\ z = t, \end{cases}$$

La distancia de un punto P a una recta que pasa por Q y tiene dirección $\vec{v}$ es

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{QP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Sustituimos $\vec{QP} = P - Q = (0, 3, 3)$:

$$\vec{QP} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -6, 6),$$

$$\|\vec{QP} \times \vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 6^2} = 9, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

Por tanto, $d(P, r) = 9/3 = 3$.

b) Puntos de la recta a distancia $\sqrt{5} d$ de P

Del apartado anterior, $d = 3$, así que la distancia pedida es $3\sqrt{5}$. Un punto genérico de la recta es

$$R(t) = (3 - 2t, -1 + 2t, t).$$

Imponemos la distancia euclídea al cuadrado igual a $(3\sqrt{5})^2 = 45$:

$$\begin{aligned} \|R(t) - P\|^2 &= (-2t)^2 + (2t - 3)^2 + (t - 3)^2 \\ &= 9t^2 - 18t + 18 = 45. \end{aligned}$$

Dividimos entre 9 y factorizamos:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \iff (t - 3)(t + 1) = 0,$$

de modo que $t = 3$ o $t = -1$. Sustituyendo cada valor en la recta:

$$t = -1 \implies M = (5, -3, -1), \quad t = 3 \implies N = (-3, 5, 3).$$

$$\boxed{M = (5, -3, -1), \quad N = (-3, 5, 3)}.$$

Ejercicio B · Problema 1

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Matriz inversa de P

Para una matriz 2×2 , $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, siempre que el determinante no sea cero. Aquí,

$$\det P = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1 \neq 0, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Hallar X si $P^{-1}XP = Q$

Multiplicamos la igualdad por P a la izquierda y por P^{-1} a la derecha:

$$P^{-1}XP = Q \implies X = PQP^{-1}.$$

Hacemos los productos por separado. Primero,

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$X = (PQ)P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

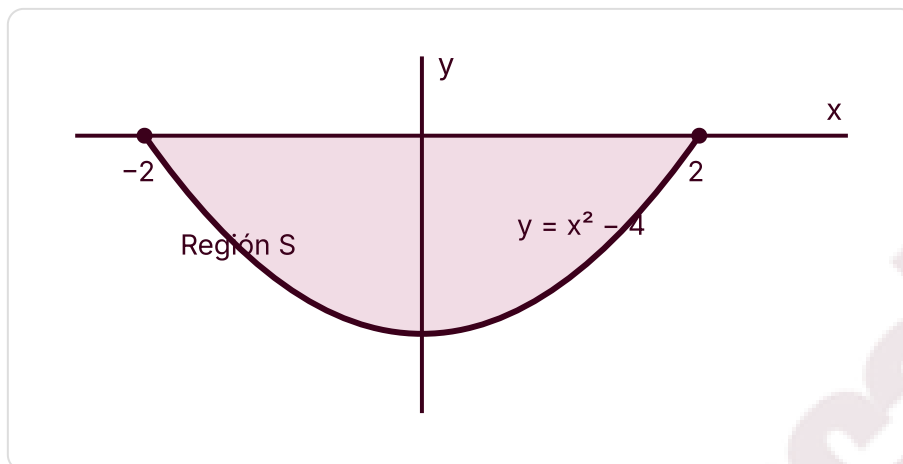
c) Calcular $(PQP^{-1})^2$

Como $PQP^{-1} = X$, elevamos al cuadrado multiplicando X por sí misma:

$$\begin{aligned} X^2 &= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \cdot 6 + (-2) \cdot 6 & 6 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) \\ 6 \cdot 6 + (-1) \cdot 6 & 6 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejercicio B · Problema 2

La curva es $y = x^2 - 4$ y el intervalo es $[-2, 2]$. Sus intersecciones con el eje OX se obtienen de $x^2 - 4 = 0$, es decir, $x = -2$ y $x = 2$. En el intervalo, la curva queda por debajo del eje: por ejemplo, en $x = 0$, $y = -4$. La región está entre $y = 0$ y $y = x^2 - 4$.



a) Área de la región

El área entre dos curvas se obtiene integrando «función de arriba menos función de abajo». Aquí esas funciones son 0 y $x^2 - 4$, respectivamente. Una primitiva del integrando es $G(x) = 4x - \frac{x^3}{3} + C$:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 (0 - (x^2 - 4)) \, dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) \, dx \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-2}^{x=2} = \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) \\ &= \boxed{\frac{32}{3} \text{ unidades}^2}. \end{aligned}$$

b) Volumen al girar alrededor del eje OX

Al girar la región alrededor de OX , cada sección perpendicular al eje es un disco. Su radio es la distancia desde el eje hasta la curva: $R(x) = 4 - x^2$. La fórmula del volumen por discos es $V = \pi \int R(x)^2 \, dx$. Al expandir, el integrando es $16 - 8x^2 + x^4$, cuya primitiva es $H(x) = 16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + C$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) \, dx \\ &= \pi \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{x=-2}^{x=2} \\ &= \pi \left(\frac{256}{15} - \left(-\frac{256}{15} \right) \right) = \boxed{\frac{512\pi}{15} \text{ unidades}^3}. \end{aligned}$$

Ejercicio B - Problema 3

Sea X el peso, en kilogramos, de un estudiante. El enunciado da media $\mu = 68,5$ kg y desviación típica $\sigma = 10$ kg. Al tipificar usamos

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

a) Número esperado de estudiantes entre 48 kg y 71 kg

Convertimos los dos extremos a valores tipificados:

$$z_{48} = \frac{48 - 68,5}{10} = -2,05, \quad z_{71} = \frac{71 - 68,5}{10} = 0,25.$$

Con la tabla de la normal estándar, $\Phi(0,25) = 0,5987$ y $\Phi(-2,05) = 0,0202$. Por diferencia,

$$P(48 \leq X \leq 71) = 0,5987 - 0,0202 = 0,5785.$$

De 500 estudiantes, el número esperado es

$$500 \cdot 0,5785 = 289,25 \implies \boxed{\text{aproximadamente 289 estudiantes}}.$$

b) Número esperado de estudiantes que pesan más de 91 kg

Tipificamos 91:

$$z_{91} = \frac{91 - 68,5}{10} = 2,25.$$

La cola superior vale $P(Z > 2,25) = 1 - \Phi(2,25) = 1 - 0,9878 = 0,0122$. Por tanto,

$$500 \cdot 0,0122 = 6,1 \implies \boxed{\text{aproximadamente 6 estudiantes}}.$$

c) Probabilidad de que exactamente dos de cinco pesen más de 75 kg

Primero calculamos la probabilidad de que un estudiante supere los 75 kg:

$$z_{75} = \frac{75 - 68,5}{10} = 0,65, \quad p = P(X > 75) = 1 - \Phi(0,65) = 1 - 0,7422 = 0,2578.$$

Consideramos «supera 75 kg» como éxito. Para cinco selecciones, la variable que cuenta los éxitos sigue el modelo binomial $Y \sim B(5, 0.2578)$ (la aproximación habitual para una muestra pequeña frente a los 500 alumnos). La probabilidad de exactamente dos éxitos es

$$\begin{aligned} P(Y = 2) &= \binom{5}{2} p^2 (1 - p)^3 \\ &= 10(0,2578)^2 (0,7422)^3 \\ &\approx \boxed{0,2717}. \end{aligned}$$

El factor $\binom{5}{2} = 10$ cuenta las diez maneras de colocar los dos alumnos que superan 75 kg entre los cinco. La fórmula binomial reúne esos diez casos; un árbol completo tendría 32 caminos y no añade claridad aquí.

Ejercicio B · Problema 4

a) Recta de intersección de los planos

Para π , formamos dos vectores del plano y calculamos su normal:

$$\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0), \overrightarrow{AC} = (1, -3, 4), \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12, -12, -6) \sim (2, 2, 1).$$

Con este normal y el punto A , la ecuación general de π es

$$2(x - 0) + 2(y - 2) + (z - 1) = 0 \implies \boxed{\pi : 2x + 2y + z - 5 = 0}.$$

Para π' , repetimos el cálculo:

$$\overrightarrow{A'B'} = (-1, 1, -1), \overrightarrow{A'C'} = (2, 4, -4), \overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} = (0, -6, -6) \sim (0, 1, 1).$$

Al usar A' , resulta

$$(y - 0) + (z - 2) = 0 \implies \boxed{\pi' : y + z - 2 = 0}.$$

La dirección de la recta común es perpendicular a los dos normales. Con $n = (2, 2, 1)$ y $n' = (0, 1, 1)$:

$$\vec{v} = n \times n' = (1, -2, 2).$$

Buscamos un punto común resolviendo las ecuaciones. Si tomamos $x = 1$, entonces $y + z = 2$ y $2 + 2y + z = 5$; de aquí $y = 1, z = 1$. Por tanto, la recta en forma paramétrica es

$$r : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = 1 + 2t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

b) Ángulo entre los planos

El ángulo agudo entre planos es el formado por sus normales. Así,

$$\cos \alpha = \frac{|n \cdot n'|}{\|n\| \|n'\|} = \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Como α es agudo y $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$,

$$\boxed{\alpha = 45^\circ}.$$

c) Plano que contiene a r y es perpendicular a π

El normal buscado debe ser perpendicular al director $\vec{v}$ de r y al normal n de π . Lo obtenemos con el producto vectorial:

$$n_\sigma = \vec{v} \times n = (1, -2, 2) \times (2, 2, 1) = (-6, 3, 6) \sim (-2, 1, 2).$$

Como el plano pasa por $(1, 1, 1)$, usamos $n_\sigma \cdot ((x, y, z) - (1, 1, 1)) = 0$ y desarrollamos:

$$-2(x - 1) + (y - 1) + 2(z - 1) = 0 \quad : \quad -2x + y + 2z - 1 = 0.$$