

Se desarrollan todos los ejercicios de los cuatro bloques, incluidas las alternativas, para ofrecer una propuesta completa.

Bloque A

Ejercicio 1 · Ecuaciones matriciales

La matriz del enunciado es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones son $(A + I_3)X + Y = A - I_3$ y $X - Y = I_3$. De la segunda,

$$Y = X - I_3.$$

Sustituimos esta expresión en la primera para eliminar Y :

$$(A + I_3)X + (X - I_3) = A - I_3 \implies (A + 2I_3)X = A.$$

Como

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det(A + 2I_3) = 4(12 - 4) + 4 = 36 \neq 0,$$

podemos multiplicar por su inversa por la izquierda:

$$X = (A + 2I_3)^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

A partir de $Y = X - I_3$,

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

b) Rang e invertibilidad. Para $A + I_3$,

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(A + I_3) = 3(6 - 4) + 4 = 10 \neq 0.$$

Tiene rango 3 y es invertible. En cambio,

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A - I_3) = 0.$$

El menor formado por las dos primeras filas y las columnas primera y tercera vale $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, así que el rango es al menos 2. Como el determinante de orden 3 es cero, el rango es exactamente 2 y la matriz no es invertible.

$$\text{rg}(A + I_3) = 3 \text{ (invertible)}, \quad \text{rg}(A - I_3) = 2 \text{ (no invertible)}.$$

Ejercicio 2 · Optimización de la producción

Sean x y y los menús premium y estándar que se elaboran cada semana. Las disponibilidades de cocina, empaquetado y cámaras imponen, respectivamente,

$$2x + 3y \leq 58, \quad 2x + y \leq 50, \quad x + 4y \leq 60, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

El beneficio que queremos maximizar es

$$B(x, y) = 10,50x + 5,50y.$$

Al ser lineal, sus extremos en el recinto factible se encuentran en los vértices. Las intersecciones con los ejes son $(25, 0)$ y $(0, 15)$, además del origen. Las intersecciones entre las rectas de recursos dan

$$2x + 3y = 58, \quad 2x + y = 50 \implies (x, y) = (23, 4),$$

$$2x + 3y = 58, \quad x + 4y = 60 \implies (x, y) = \left(\frac{52}{5}, \frac{62}{5}\right),$$

$$2x + y = 50, \quad x + 4y = 60 \implies (x, y) = (20, 10).$$

El último punto no es factible, pues $2(20) + 3(10) = 70 > 58$. Los vértices factibles en los que debemos evaluar el beneficio son $(0, 0)$, $(25, 0)$, $(23, 4)$, $(\frac{52}{5}, \frac{62}{5})$ y $(0, 15)$. Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno:

(x, y)	$B(x, y)$
$(0, 0)$	0
$(25, 0)$	262,50
$(23, 4)$	263,50
$(\frac{52}{5}, \frac{62}{5})$	177,40
$(0, 15)$	82,50

El mayor valor corresponde a $(23, 4)$. Comprobamos que consume exactamente las 58 horas de cocina y las 50 de empaquetado, y utiliza 39 dm^3 de cámara, dentro del límite de 60.

23 menús premium, 4 estándar; $B_{\max} = 263,50 \text{ €}$ por semana.

Bloque B

Ejercicio 3 · Continuidad y área

a) Continuidad de la función. En cada tramo la expresión es continua dentro de su intervalo. Solo hay que igualar los límites laterales en los puntos de unión $x = -1$ y $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} a e^{x+1}, & x \leq -1, \\ x^2 - 2, & -1 < x < 2, \\ b \log(12 - x), & 2 \leq x < 12. \end{cases}$$

En $x = -1$, la continuidad exige

$$a e^0 = (-1)^2 - 2 \implies a = -1.$$

En $x = 2$, el valor del tramo central es $2^2 - 2 = 2$, y debe coincidir con el valor del tercer tramo:

$$b \log(10) = 2 \implies b = \frac{2}{\log(10)}.$$

$$a = -1, \quad b = \frac{2}{\log(10)}.$$

b) Área entre la recta y la parábola. Para encontrar los extremos del recinto igualamos las dos funciones:

$$-x + 3 = -x^2 + 5 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies x = -1, 2.$$

Entre esos valores la parábola queda por encima de la recta, pues

$$(-x^2 + 5) - (-x + 3) = -x^2 + x + 2 > 0$$

(por ejemplo, en $x = 0$ la diferencia vale 2). El área es la integral de la función superior menos la inferior:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 [(-x^2 + 5) - (-x + 3)] dx \\ &= \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6} \right) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

$$A = \frac{9}{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejercicio 4 · Continuidad, derivabilidad y extremos

El nivel inicial es el valor de la primera expresión en $t = 0$:

$$f(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 + 10 = 10.$$

Para que la función sea continua y derivable en $t = 2,5$, igualamos los valores y las derivadas laterales. La continuidad da

$$-(2,5)^2 + 2(2,5) + 10 = (2,5)^2 + 2,5a + b \implies 2,5a + b = 2,5.$$

Las derivadas en los dos tramos son $-2t + 2$ y $2t + a$. Su igualdad en $t = 2,5$ exige

$$-2(2,5) + 2 = 2(2,5) + a \implies a = -8.$$

Sustituyendo en la condición de continuidad,

$$b = 2,5 - 2,5(-8) = 22,5.$$

$$f(0) = 10, \quad a = -8, \quad b = 22,5.$$

Para estudiar los extremos con $a = -8$ y $b = 22,5$, derivamos por tramos:

$$f'(t) = \begin{cases} -2t + 2, & 0 \leq t \leq 2,5, \\ 2t - 8, & 2,5 < t \leq 5. \end{cases}$$

En el primer tramo $f'(t) > 0$ si $t < 1$, se anula en $t = 1$ y es negativa si $t > 1$. En el segundo tramo es negativa para $t < 4$, se anula en $t = 4$ y es positiva para $t > 4$. Por tanto, la función crece de 0 a 1, decrece de 1 a 4 y vuelve a crecer de 4 a 5. Los valores relevantes son

$$f(0) = 10, \quad f(1) = 11, \quad f(2,5) = 8,75, \quad f(4) = 6,5, \quad f(5) = 7,5.$$

$$\text{Máximo: } 11 \text{ en } t = 1; \quad \text{mínimo: } 6,5 \text{ en } t = 4.$$

Bloque C

Ejercicio 5 · Probabilidad total y condicionada

Llamamos F, T, M a los sucesos «ciencia ficción», «terror» y «musical», y C a «recomendación correcta». Los tres géneros son incompatibles y cubren todas las películas. En cada rama, la probabilidad conjunta se obtiene multiplicando la probabilidad del género por la probabilidad condicionada de acierto:

Género	$P(\text{género})$	$P(C \mid \text{género})$	$P(\text{género} \cap C)$
F	0,62	0,70	0,434
T	0,25	0,75	0,1875
M	0,13	0,15	0,0195

a) Sumamos las probabilidades de las recomendaciones correctas de cada género, ya que son casos incompatibles:

$$P(C) = 0,434 + 0,1875 + 0,0195 = 0,641.$$

b) Aplicamos la probabilidad condicionada. La rama «terror e incorrecta» tiene probabilidad $0,25 \cdot (1 - 0,75) = 0,0625$, mientras que $P(C^c) = 1 - 0,641 = 0,359$:

$$P(T \mid C^c) = \frac{P(T \cap C^c)}{P(C^c)} = \frac{0,0625}{0,359} = \frac{125}{718} \approx 0,1741.$$

c) La probabilidad de que sea de ciencia ficción, la recomendación sea correcta y el usuario quede satisfecho se obtiene multiplicando las probabilidades sucesivas de la rama:

$$P(F \cap C \cap S) = P(F) P(C \mid F) P(S \mid F \cap C) = 0,62 \cdot 0,70 \cdot 0,55 = 0,2387.$$

$$P(C) = 0,641; \quad P(T \mid C^c) = \frac{125}{718} \approx 0,1741; \quad P(F \cap C \cap S) = 0,2387.$$

Bloque D

Ejercicio 6 · Intervalo de confianza para la media

Como la población es normal y conocemos la desviación típica $\sigma = 4,2$ días, el intervalo de confianza para la media se calcula mediante

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Aquí $\bar{x} = 11,3$, $n = 30$ y, para un nivel de confianza del 97%, $z_{0,985} \approx 2,170$. El error máximo es

$$E = 2,170 \frac{4,2}{\sqrt{30}} \approx 1,664.$$

Así, el intervalo queda

$$[11,3 - 1,664, 11,3 + 1,664] \approx [9,636, 12,964].$$

La media de 9,8 días que afirma la gerencia pertenece al intervalo; por tanto, estos datos no permiten descartar que sea el promedio poblacional.

$$IC_{97\%}(\mu) \approx [9,636, 12,964] \text{ días; } 9,8 \text{ días es compatible con la muestra.}$$

Para un nivel de confianza del 95%, $z_{\alpha/2} = 1,96$. Si queremos que el error sea como máximo $E = 0,6$ días, despejamos el tamaño muestral de la fórmula anterior:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 4,2}{0,6} \right)^2 \approx 188,24.$$

Como n debe ser entero, redondeamos hacia arriba.

$$n_{\min} = 189 \text{ usuarios.}$$

Ejercicio 7 · Intervalo de confianza para una proporción

La proporción muestral favorable es

$$\hat{p} = \frac{130}{200} = 0,65, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,35.$$

a) Para una proporción, el intervalo aproximado es

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}.$$

Con confianza del 96,5%, $z_{0,9825} \approx 2,1084$. Por tanto,

$$0,65 \pm 2,1084 \sqrt{\frac{0,65 \cdot 0,35}{200}} = 0,65 \pm 0,0711,$$

y el intervalo es $[0,5789, 0,7211]$.

b) Con confianza del 99%, $z_{\alpha/2} = 2,576$. Para que el error no supere el 2%, imponemos

$$2,576 \sqrt{\frac{0,65 \cdot 0,35}{n}} \leq 0,02 \implies n \geq \frac{2,576^2 \cdot 0,65 \cdot 0,35}{0,02^2} \approx 3774.$$

El tamaño mínimo entero que satisface la condición es 3774.

c) Si se mantiene n y $\hat{p}$, el error máximo es $E = z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$. Al aumentar el nivel de confianza, también aumenta $z_{\alpha/2}$, por lo que el error máximo crece.

$$IC_{96,5\%}(p) \approx [0,5789, 0,7211]; \quad n_{\min, 99\%} = 3774; \quad \text{el error aumenta con la confianza.}$$