

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de junio de 2004

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Optimización del área de un triángulo

Sea b la base y l cada uno de los lados iguales. El perímetro impone $2l + b = 8$, por lo que $l = (8 - b)/2$. La desigualdad triangular exige $0 < b < 4$. La altura se obtiene aplicando Pitágoras a la mitad del triángulo:

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = 2\sqrt{4 - b}.$$

Así, el área que queremos maximizar, expresada en función de una sola variable, es

$$A(b) = \frac{bh}{2} = b\sqrt{4 - b}, \quad 0 < b < 4.$$

Derivamos y buscamos los puntos críticos del dominio:

$$A'(b) = \sqrt{4 - b} - \frac{b}{2\sqrt{4 - b}} = \frac{8 - 3b}{2\sqrt{4 - b}} = 0 \implies b = \frac{8}{3}.$$

En los extremos del intervalo el área tiende a cero; además, A' es positiva si $b < 8/3$ y negativa si $b > 8/3$. Por tanto, el punto crítico da el máximo absoluto. La longitud de los lados iguales y la altura son

$$l = \frac{8 - 8/3}{2} = \frac{8}{3}, \quad h = 2\sqrt{4 - \frac{8}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Conclusión. El triángulo de área máxima es equilátero: su base y sus lados miden $8/3$, y su altura mide $4/\sqrt{3}$.

Opción A - Ejercicio 2. Asíntotas, extremos e integral

El denominador $4x^2 + 1$ es positivo para todo x , así que el dominio es $\mathbb{R}$ y no puede haber asíntotas verticales. Como numerador y denominador tienen el mismo grado, el cociente de sus coeficientes principales da la asíntota horizontal $y = 1$.

$$f'(x) = \frac{4(4x^2 - 1)}{(4x^2 + 1)^2}.$$

El denominador es siempre positivo; el signo depende de $4x^2 - 1$. La derivada se anula en $x = \pm 1/2$: es positiva fuera de ese intervalo y negativa dentro. Por ello hay un máximo absoluto en $x = -1/2$ y un mínimo absoluto en $x = 1/2$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Para la integral reescribimos la función como $1 - \frac{4x}{4x^2 + 1}$; en el segundo término hacemos el cambio $u = 4x^2 + 1$, cuya derivada es $8x$:

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[x - \frac{1}{2} \ln(4x^2 + 1) \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} \ln 5.$$

Conclusión. La única asíntota es $y = 1$; el máximo es 2 en $x = -1/2$, el mínimo es 0 en $x = 1/2$ y la integral vale $1 - \frac{1}{2} \ln 5$.

Opción A - Ejercicio 3. Discusión de un sistema homogéneo

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & 4 \\ 1 & -(1+a) & 1 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = (A \mid 0).$$

Al ser el sistema homogéneo, siempre es compatible. Calculamos

$$\det A = -(a+3).$$

Si $a \neq -3$, el determinante no se anula y $\operatorname{rg}(A) = 3$, así que Rouché-Frobenius da un sistema compatible determinado: la única solución es $(0, 0, 0)$.

Para $a = -3$, el menor de las dos primeras filas y las columnas x, y vale

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

por lo que $\operatorname{rg}(A) = 2$. La tercera fila es combinación de las dos primeras y $\operatorname{rg}(A^*) = 2$. Como ese rango es menor que las tres incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Resolviendo se obtiene $y = 0$ y $x = -z$.

$$(x, y, z) = t(-1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $a \neq -3$ la solución es solo la trivial; para $a = -3$ hay infinitas soluciones, dadas por la familia anterior.

Opción A - Ejercicio 4. Posiciones relativas y distancia

La recta tiene punto $P = (2, 1, 4)$ y vector director $\vec{d} = (-3, 2, -1)$. Los vectores normales de los planos son $\vec{n}_1 = (-3, 2, -1)$ y $\vec{n}_2 = (2, 2, -2)$.

a) Para π_1 , el producto $\vec{d} \cdot \vec{n}_1 = 14 \neq 0$, así que la recta la corta. Para π_2 , $\vec{d} \cdot \vec{n}_2 = -6 + 4 + 2 = 0$, de modo que es paralela o está contenida. Al sustituir P en $2x + 2y - 2z + 3 = 0$ resulta $1 \neq 0$; por tanto, es paralela y exterior.

b) Los normales no son proporcionales, así que los planos se cortan en una recta.

c) Como r es paralela a π_2 , la distancia entre ambos es la distancia de cualquier punto de r al plano. Usamos

$$d(P, \pi_2) = \frac{|Ax_P + By_P + Cz_P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Con $P = (2, 1, 4)$ y $\pi_2 : 2x + 2y - 2z + 3 = 0$,

$$d(r, \pi_2) = \frac{|4 + 2 - 8 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 4}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Conclusión. r corta a π_1 , es paralela exterior a π_2 ; los planos se cortan y $d(r, \pi_2) = 1/(2\sqrt{3})$.

Opción B - Ejercicio 1. Inversa y ecuación matricial

Se dan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como A es triangular por bloques, su determinante es 1 y es invertible. Para resolver $AXA^T = B$ multiplicamos por A^{-1} por la izquierda y por $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ por la derecha:

$$X = A^{-1}B(A^{-1})^T.$$

La inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primero,

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y, al multiplicar por $(A^{-1})^T$,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. La matriz que cumple la ecuación es $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Opción B - Ejercicio 2. Sistemas compatibles con ecuaciones dependientes

a) Las ecuaciones $x + 2y = 1$ y $3x - y = 2$ tienen solución $(x, y) = (5/7, 1/7)$. Una tercera ecuación compatible puede ser cualquier combinación lineal de las dos primeras con el mismo cálculo en los términos independientes. Sumándolas se obtiene

$$4x + y = 3.$$

No coincide con ninguna de las dos ecuaciones iniciales y conserva la solución común.

b) Sumamos las dos ecuaciones dadas:

$$(2x + 2y - z) + (x + y + 2z) = 1 + 1 \implies 3x + 3y + z = 2.$$

La ecuación resultante es distinta de las dos iniciales, pero no aumenta el rango de la matriz ampliada. Las dos primeras ecuaciones son independientes, así que el rango es $2 < 3$ incógnitas. **Conclusión.** Una elección válida es $4x + y = 3$ en a), y $3x + 3y + z = 2$ en b); el segundo sistema es compatible indeterminado.

Opción B - Ejercicio 3. Posición relativa de tres planos

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & k \\ 1 & k & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -k \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $-(k+2)(3k-1)$. Para $k \neq -2, 1/3$, el rango de A es 3 y los tres planos tienen un único punto común.

En los valores singulares, el menor

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 2k - 3$$

vale -7 si $k = -2$ y $-7/3$ si $k = 1/3$, por lo que $\text{rg}(A) = 2$ en ambos casos. Si $k = -2$, la tercera fila de A^* es la suma de las dos primeras; los rangos ampliado y de coeficientes son ambos 2. Así, los planos contienen una recta común. Resolviendo dos ecuaciones independientes:

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{7}, \frac{5}{7}, 0 \right) + t(1, 0, 1).$$

Si $k = 1/3$, el menor de A^* formado por las columnas x, y y la ampliada es

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1/3 & -1 \\ 3 & 1 & -1/3 \end{vmatrix} = -\frac{56}{9} \neq 0.$$

Por tanto $\text{rg}(A^*) = 3 > \text{rg}(A) = 2$: no existe punto común. Cada pareja de planos sí se corta en una recta, y esas rectas son paralelas entre sí. **Conclusión.** Hay un punto común si $k \neq -2, 1/3$; para $k = -2$ comparten la recta indicada; para $k = 1/3$ no tienen punto común. Un vector director de la recta común es $(1, 0, 1)$.

Opción B - Ejercicio 4. Tangente y distancias

Como $f(x) = 1 - x^2$, la pendiente de la tangente en $P(a, 1 - a^2)$ es $f'(a) = -2a$. La ecuación punto-pendiente queda

$$y - (1 - a^2) = -2a(x - a), \quad \text{es decir,} \quad y = 1 + a^2 - 2ax.$$

b) Al hacer $x = 0$ se obtiene el corte vertical $A = (0, 1 + a^2)$. Al hacer $y = 0$ se obtiene el corte horizontal $B = ((1 + a^2)/(2a), 0)$.

c) Como $0 < a < 1$, las distancias son

$$PA = \sqrt{a^2 + (2a^2)^2} = a\sqrt{1 + 4a^2},$$
$$PB = \sqrt{\left(\frac{1 - a^2}{2a}\right)^2 + (1 - a^2)^2} = \frac{1 - a^2}{2a} \sqrt{1 + 4a^2}.$$

La condición $PA = 2PB$, tras cancelar el factor positivo común, da $a = (1 - a^2)/a$, luego $2a^2 = 1$. La solución pertenece al intervalo pedido. **Conclusión.** $a = 1/\sqrt{2}$.