

Problema 1. A. Una empresa fabrica lotes de tres productos: P1, P2 y P3. La empresa tiene dos plantas de fabricación: A y B. En un día de funcionamiento, la planta A fabrica 1 lote del producto P1, 2 lotes del P2 y 1 lote del P3, mientras que la planta B fabrica 1 lote del producto P1, 1 del P2 y 5 del P3. Cada día de funcionamiento de la planta A cuesta 60 miles de euros y cada día de funcionamiento de la planta B cuesta 75 miles de euros. En los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3.

- a) ¿Cuántos días ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo?
(3 puntos)
- b) ¿Cuál es dicho coste mínimo? (0,5 puntos)

Solución:

Llamando: x = número de días que funciona la planta A

y = número de días que funciona la planta B

Los datos del problema podemos resumirlo en la tabla siguiente:

	Nº días	P1	P2	P3	Coste
A	x	1 lote/día	2 lote/día	1 lote/día	60000€/día
B	y	1 lote/día	1 lote/día	5 lote/día	75000€/día
Necesidades		≥ 6	≥ 8	≥ 10	

El problema proporcionan las siguientes restricciones:

La empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1 $\rightarrow x + y \geq 6$.

La empresa tiene que producir al menos 8 lotes del producto P2 $\rightarrow 2x + y \geq 8$.

La empresa tiene que producir al menos 10 lotes del producto P3 $\rightarrow x + 5y \geq 10$.

Como las variables x e y representan número de días deben ser números naturales.

El coste de producción viene dado por la función: $z = 60000x + 75000y = 1000(60x + 75y)$

El problema a resolver es:

minimizar $z = 1000(60x + 75y)$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + 5y \geq 10 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x + y \geq 6$

$x + y = 6$

x	y
0	6
6	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 0 \geq 6$ No

(b) $2x + y \geq 8$

$2x + y = 8$

x	y
0	8
4	0

¿(0,0) cumple?

$2 \cdot 0 + 0 \geq 8$ No

(c) $x + 5y \geq 10$

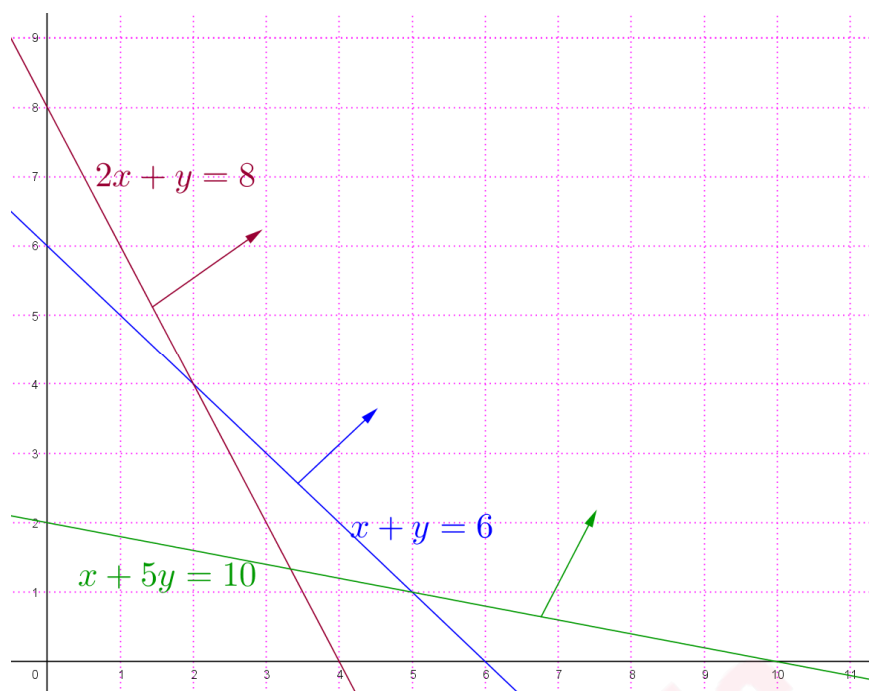
$x + 5y = 10$

x	y
0	2
10	0

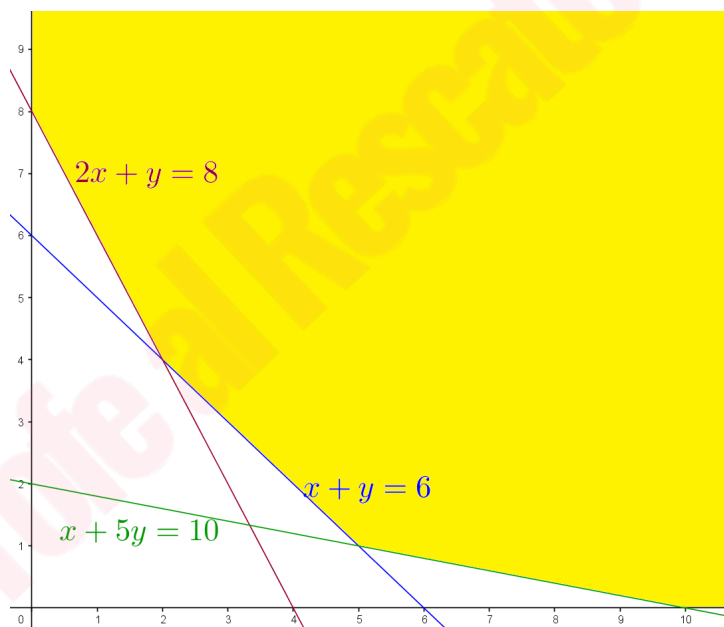
¿(0,0) cumple?

$0 + 5 \cdot 0 \geq 10$ No

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

los que obtuvimos en los cálculos para la representación son $A(0, 8)$ y $D(10, 0)$.

Punto B, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} -1xI^a \\ 2^a \end{matrix} \begin{cases} -x - y = -6 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Sumando: $x = 2$

Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación: $2 + y = 6$; $y = 6 - 2 = 4$

Luego $B(2, 4)$

Punto C, corte entre (a) y (c):

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 5y = 10 \end{cases} \quad \begin{matrix} -1xI^a \\ 2^a \end{matrix} \begin{cases} -x - y = -6 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$$

Sumando: $4y = 4$; $y = 4/4 = 1$

Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación: $x + 1 = 6$; $y = 6 - 1 = 5$

Luego $C(5, 1)$

El mínimo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 1000 (60 x + 75 y)$	
0 , 8	$1000 (60 \cdot 0 + 75 \cdot 8) = 600.000$	
2 , 4	$1000 (60 \cdot 2 + 75 \cdot 4) = 420.000$	
5 , 1	$1000 (60 \cdot 5 + 75 \cdot 1) = 375.000$	mínimo
10 , 0	$1000 (60 \cdot 10 + 75 \cdot 0) = 600.000$	

El mínimo se alcanza en el punto (5 , 1)

Por tanto,

- a) Para que el coste de producción sea mínimo la planta A debe funcionar 5 días y la B 1 día.
- b) El coste de producción mínimo será de 375000€.

Tu Profecia al Rescate

Problema 1. B. A un espectáculo circense acuden 500 espectadores, y la recaudación del importe de las entradas asciende a 2.115 euros. Los menores de 5 años pagan el 20% de la entrada, y los que tienen entre 5 y 16 años el 50%. Calcula cuántos espectadores han pagado el importe total de la entrada, que vale 9 euros, cuántos han pagado el 20% de la entrada y cuántos el 50%, sabiendo que el número de espectadores que han pagado el 20% es el doble del número de espectadores que han pagado la entrada completa.

(Planteamiento correcto 1,5 puntos --- Resolución correcta 2 puntos)

Solución:

Llamando: x = número de espectadores que pagan la entrada completa (9€)
 y = número de espectadores que pagan el 20% de la entrada completa (20% de 9 = 1'80€)
 z = número de espectadores que pagan el 50% de la entrada completa (50% de 9 = 4'50€)

Del enunciado del problema obtenemos:

“acuden 500 espectadores”, $x + y + z = 500$

“la recaudación del importe de las entradas asciende a 2.115 euros”, $9x + 1'8y + 4'5z = 2115$;
 simplificando entre 9: $x + 0'2y + 0'5z = 235$; multiplicando por 10 (para que no hay decimales):
 $10x + 2y + 5z = 2350$

“el número de espectadores que han pagado el 20% es el doble del número de espectadores que han pagado la entrada completa”, $y = 2x$; $2x - y = 0$

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ 2x - y = 0 \\ 10x + 2y + 5z = 2350 \end{cases}$$

Lo resolveremos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 5 & 2350 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 5 \cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & -150 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 3 \cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -150 \end{array} \right)$$

De $F_3 \rightarrow -x = -150$; $x = 150$

De $F_2 \rightarrow 2x - y = 0 \rightarrow 2 \cdot 150 - y = 0 \rightarrow 300 - y = 0 \rightarrow y = 300$

De $F_1 \rightarrow x + y + z = 500 \rightarrow 150 + 300 + z = 500 \rightarrow 450 + z = 500 \rightarrow z = 500 - 450 \rightarrow z = 50$

Solución: 150 espectadores han pagado la entrada completa, 300 el 20% y 50 el 50%.

Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x}, & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4, & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2, & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Se pide:

- Estudiar la continuidad de la función en el intervalo $[0,9]$. (0,75 puntos)
- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $[0,9]$ (1,5 puntos)
- Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuanto vale la función en esos puntos. (0,5 puntos)
- Calcular el área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 8$, la recta de ecuación $x = 9$. (0,75 puntos)

Solución:

a) Continuidad de esta función en el intervalo $[0,9]$.

En el intervalo $[0,4)$,

$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$, el problema de continuidad estaría donde se anule el denominador, $1+x=0$;

$x = -1$. Como $-1 \notin [0,4)$ $f(x)$ es continua en este intervalo.

Las otras dos definiciones de $f(x)$ son polinomios de 1ª o 2º grado, son continuas en sus correspondientes intervalos.

Los problemas para la continuidad de la función están en los cambios de definición.

Continuidad en $x = 4$,

a) $f(4) = 2 \cdot 4 + 4 = 12$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{1+4^2}{1+4} = \frac{17}{5} \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (2x+4) = 2 \cdot 4 + 4 = 12 \end{cases} \neq \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

Por tanto $f(x)$ no es continua en $x=4$

Continuidad en $x = 8$,

a) $f(8) = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20$

b) $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} (2x+4) = 2 \cdot 8 + 4 = 20 \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} (3x+60-x^2) = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20 \end{cases} = 20$

c) $f(8) = \lim_{x \rightarrow 8} f(x)$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x=8$

Solución: $f(x)$ es continua en $[0, 9] \sim \{4\}$ y en $x = 4$ tiene una discontinuidad de salto finito.

b) Crecimiento y decrecimiento de esta función en el intervalo $[0,9]$.

En el intervalo $(0,4)$,

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$$

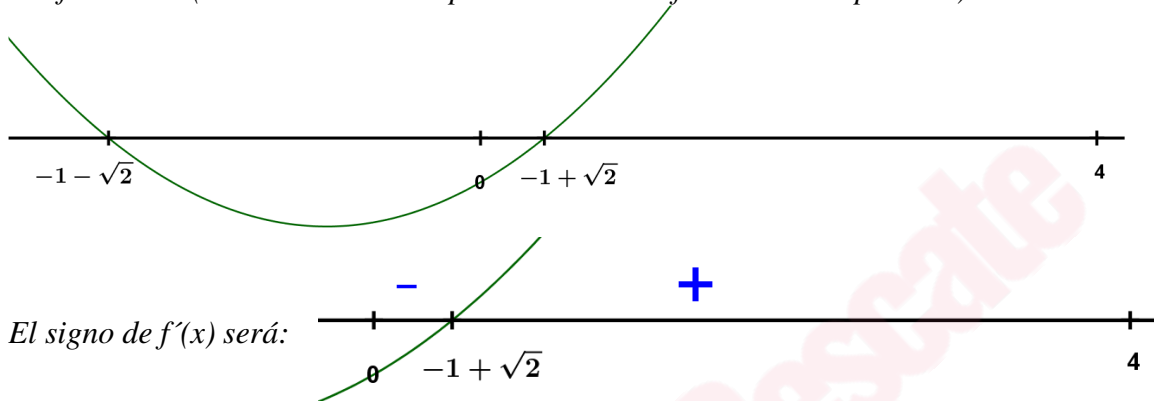
$$f'(x) = \frac{2x(1+x) - (1+x^2)1}{(1+x)^2} = \frac{2x+2x^2-1-x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$;

Como el denominador es una expresión al cuadrado será positivo; debemos estudiar el signo del numerador:

$$x^2 + 2x - 1 = 0; \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} -1 + \sqrt{2} \cong 0.41 \in (0,4) \\ -1 - \sqrt{2} \cong -2.41 \notin (0,4) \end{cases}$$

Gráficamente $(x^2 + 2x - 1)$ es una parábola con coeficiente de x^2 positivo)



En el intervalo $(4,8)$,

$f(x) = 2x + 4$, polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo por tanto creciente.

En el intervalo $(8,9)$,

$$f(x) = -x^2 + 3x + 60$$

$$f'(x) = -2x + 3; \quad -2x + 3 = 0; \quad 2x = 3; \quad x = \frac{3}{2} = 1.5$$

Signo de $f'(x)$:

a la izquierda de 1.5: $f'(0) = -2 \cdot 0 + 3 = 3$ positivo

a la derecha de 1.5: $f'(3) = -2 \cdot 3 + 3 = -3$ negativo

Por tanto en el intervalo $(8,9)$ $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ decreciente.

Finalmente, $f(x)$ es creciente en $(-1 + \sqrt{2}, 4) \cup (4, 8)$ y es decreciente en $(0, -1 + \sqrt{2}) \cup (8, 9)$.

c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuanto vale la función en esos puntos.

De la función sabemos que es continua en $[0, 9] \sim \{4\}$ y que es creciente en $(-1 + \sqrt{2}, 4) \cup (4, 8)$ y es decreciente en $(0, -1 + \sqrt{2}) \cup (8, 9)$.

Representemos gráficamente la función

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x} \begin{cases} f(0) = \frac{1+0^2}{1+0} = 1 \\ f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{1+(-1 + \sqrt{2})^2}{1+(-1 + \sqrt{2})} = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2 + 2\sqrt{2} \cong 0.8284 \\ f(4) = \frac{1+4^2}{1+4} = \frac{17}{5} = 3.4 \end{cases}$$

Según vimos en el apartado anterior, a la izquierda de $-1 + \sqrt{2}$ $f(x)$ es decreciente y a su derecha creciente por tanto en $x = -1 + \sqrt{2}$ $f(x)$ tiene un mínimo local.

$$f(x) = 2x + 4 \quad \begin{cases} f(4) = 2 \cdot 4 + 4 = 12 \\ f(8) = 2 \cdot 8 + 4 = 20 \end{cases}$$

$$f(x) = 3x + 60 - x^2 \quad \begin{cases} f(8) = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20 \\ f(9) = 3 \cdot 9 + 60 - 9^2 = 6 \end{cases}$$

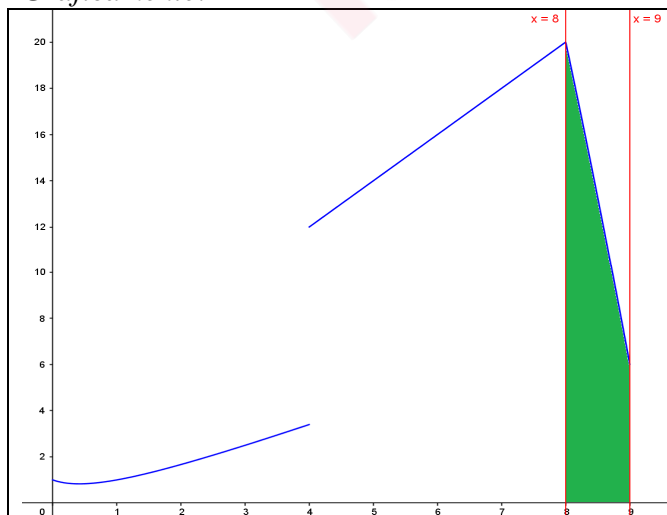


Solución: la función alcanza un mínimo en $x = -1 + \sqrt{2}$ y $f(-1 + \sqrt{2}) = -2 + 2\sqrt{2}$.

La función alcanza un máximo en $x = 8$ y $f(8) = 20$.

- d) Área de la región delimitada por $f(x)$, el eje OX , la recta de ecuación $x = 8$, la recta de ecuación $x = 9$. Entre $x = 8$ y $x = 9$ la definición de $f(x)$ es $3x + 60 - x^2$.

Gráficamente:



El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral:

$$\begin{aligned} \int_8^9 (3x + 60 - x^2) dx &= \left[3 \frac{x^2}{2} + 60x - \frac{x^3}{3} \right]_8^9 = \\ &= \left(3 \frac{9^2}{2} + 60 \cdot 9 - \frac{9^3}{3} \right) - \left(3 \frac{8^2}{2} + 60 \cdot 8 - \frac{8^3}{3} \right) = \\ &= \frac{837}{2} - \frac{1216}{3} = \frac{79}{6} \approx 13.1667 \end{aligned}$$

Solución: el área de la región indicada mide $\frac{79}{6}$ u.a.

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$$

Se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0,5 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (0'5 puntos)

Solución:

a) Dominio,

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 \\ \frac{2-6}{2} = -2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{4 \cdot 0^2 - 36}{0^2 - 2 \cdot 0 - 8} = \frac{-36}{-8} = \frac{9}{2} \rightarrow \left(0, \frac{9}{2}\right)$$

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = 0; \quad 4x^2 - 36 = 0; \quad 4x^2 = 36; \quad x^2 = 9; \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \begin{cases} x = -3; & (-3, 0) \\ x = 3; & (3, 0) \end{cases}$$

Dom $f(x) = \mathbb{R} \sim \{-2, 4\}$ y los puntos de corte con los ejes coordenados son: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 = 4$$

la asíntota horizontal es $y = 4$.

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que las posibles a.v. son $x = -2$ y $x = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4 \cdot (-2)^2 - 36}{(-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 8} = \frac{-20}{0} = \infty \rightarrow x = -2 \text{ es a.v.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4 \cdot 4^2 - 36}{4^2 - 2 \cdot 4 - 8} = \frac{28}{0} = \infty \rightarrow x = 4 \text{ es a.v.}$$

La asíntota horizontal es $y = 4$ **y las asíntotas verticales** $x = -2$ **y** $x = 4$.

c) Monotonía.

Estudiamos el signo de $f'(x)$

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$$

$$f'(x) = \frac{8x \cdot (x^2 - 2x - 8) - (4x^2 - 36) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{-8x^2 + 8x - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2}$$

$$\begin{array}{r} \frac{x^2 - 2x - 8}{8x} \quad \frac{4x^2 - 36}{2x - 2} \quad \frac{8x^3 - 16x^2 - 64x}{-8x^3 + 8x^2 + 72x - 72} \\ \hline 8x^3 - 16x^2 - 64x \quad -8x^2 + 72 \quad -8x^3 + 8x^2 + 72x - 72 \\ \hline 8x^3 \quad -72x \quad -8x^2 + 8x - 72 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 - 72x + 72 \end{array}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

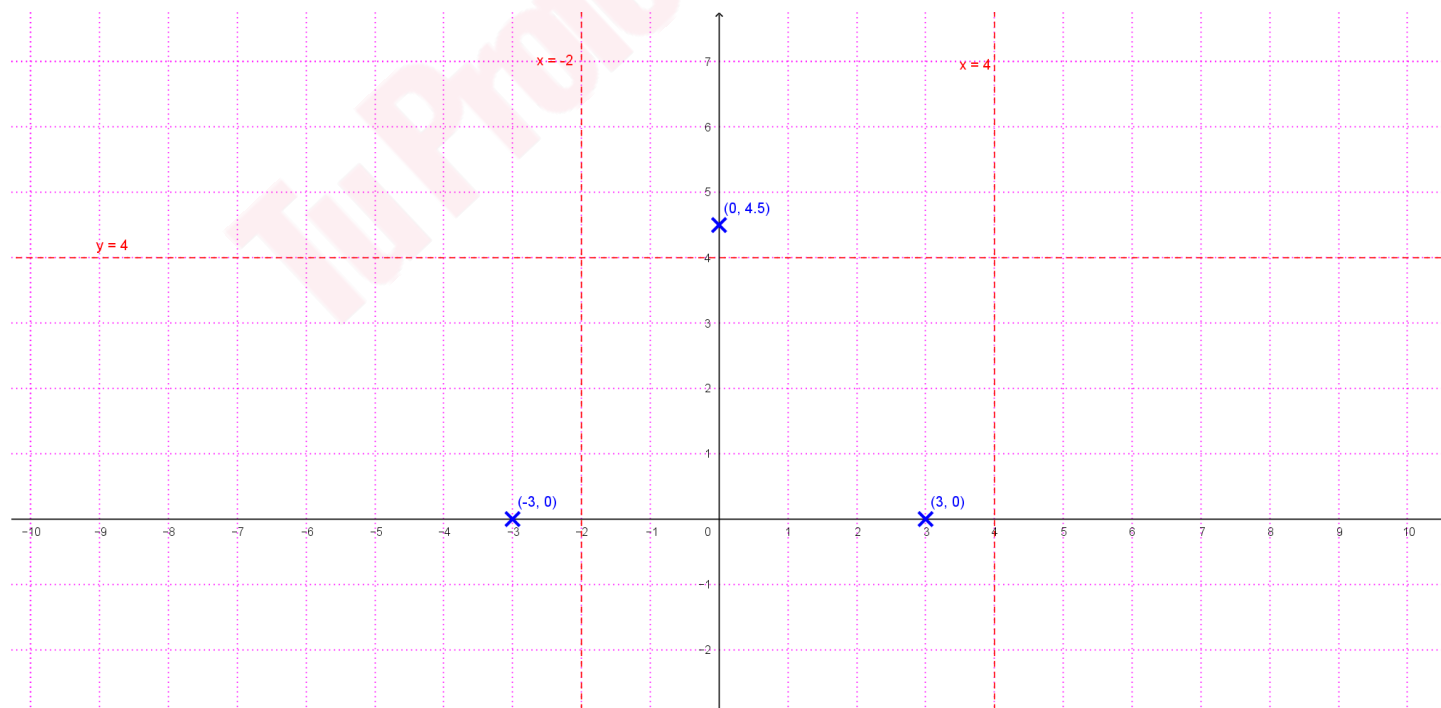
$$-8x^2 + 8x - 72 = 0 \rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-8) \cdot (-72)}}{2 \cdot (-8)} = \frac{-8 \pm \sqrt{-2240}}{-16} = \text{no tiene soluciones}$$

$$(x^2 - 2x - 8)^2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \{\text{resuelta en a)}\} \quad x = -2 \text{ y } 4 \notin \text{Dom } f(x)$$

El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y sin raíces, luego, $f'(x)$ es negativa.

Por tanto, $f(x)$ es decreciente en su dominio y no tiene ni máximos ni mínimos locales.

d) Representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.
Representando gráficamente lo obtenido en los apartados anteriores:



También sabemos que la función es decreciente en su dominio.

Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener otros puntos de la función.

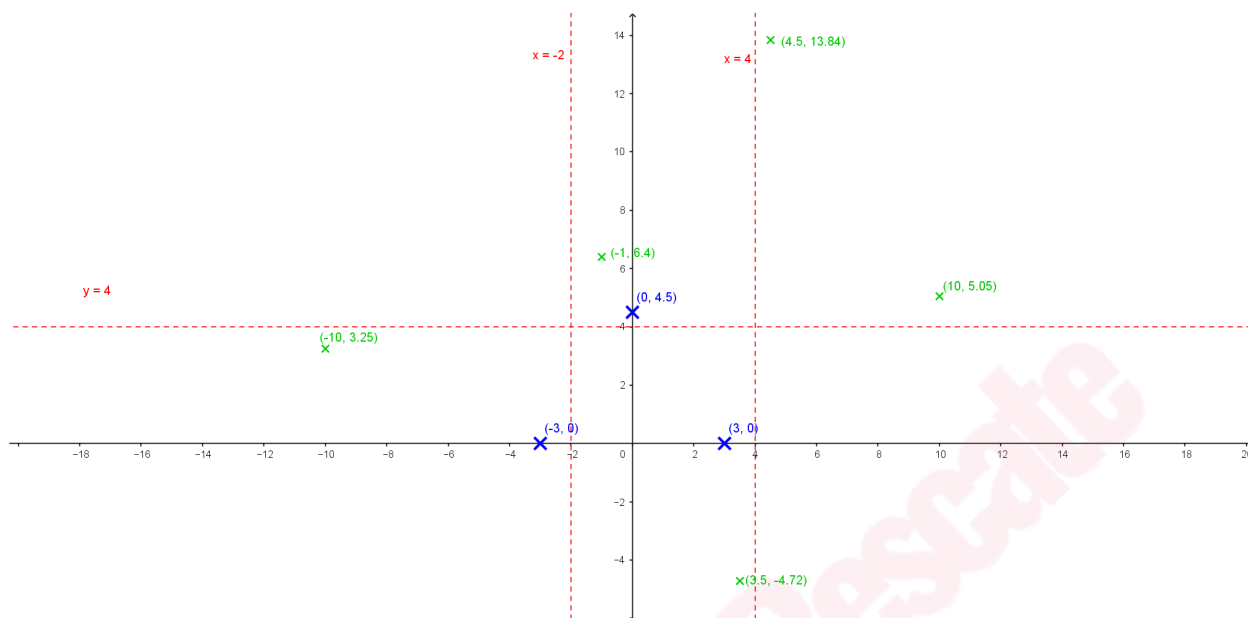
$$f(-10) = \frac{4(-10)^2 - 36}{(-10)^2 - 2(-10) - 8} = \frac{13}{4} = 3'25$$

$$f(-1) = \frac{4(-1)^2 - 36}{(-1)^2 - 2(-1) - 8} = \frac{32}{5} = 6'4$$

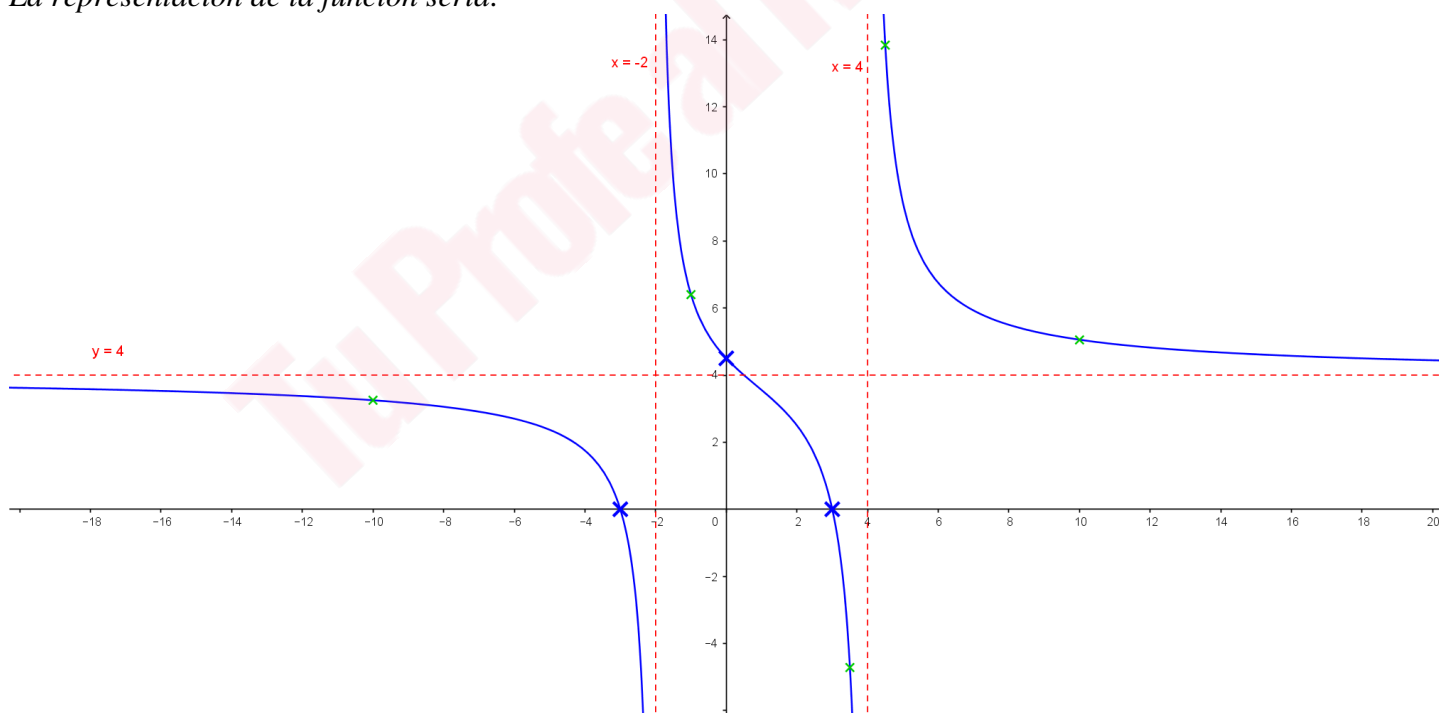
$$f(3'5) = \frac{4 \cdot 3'5^2 - 36}{3'5^2 - 2 \cdot 3'5 - 8} = \frac{-52}{11} \cong -4'72$$

$$f(4'5) = \frac{4 \cdot 4'5^2 - 36}{4'5^2 - 2 \cdot 4'5 - 8} = \frac{180}{13} \cong 13'84$$

$$f(10) = \frac{4 \cdot 10^2 - 36}{10^2 - 2 \cdot 10 - 8} = \frac{91}{18} \cong 5'05$$



La representación de la función sería:



Problema 3. En un país se sabe que un 35% de personas vive en municipios pequeños (10 000 habitantes o menos), un 25% de personas vive en municipios medianos (entre 10 001 y 50 000 habitantes) y un 40% de personas vive en municipios grandes (más de 50 000 habitantes). Entre las personas que viven en municipios pequeños, un 20% se graduó en la universidad; entre las que viven en municipios medianos, un 30% se graduó en la universidad; y entre las que viven en municipios grandes, un 60% se graduó en la universidad. Seleccionamos al azar una persona de este país.

- Calcula la probabilidad de que la persona seleccionada se haya graduado en la universidad. (1 punto)
- Si sabemos que la persona seleccionada se graduó en la universidad, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un municipio con más de 10 000 habitantes? (1 punto)
- Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" y "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes". (1 punto)

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

MP = la persona vive en un municipio pequeño

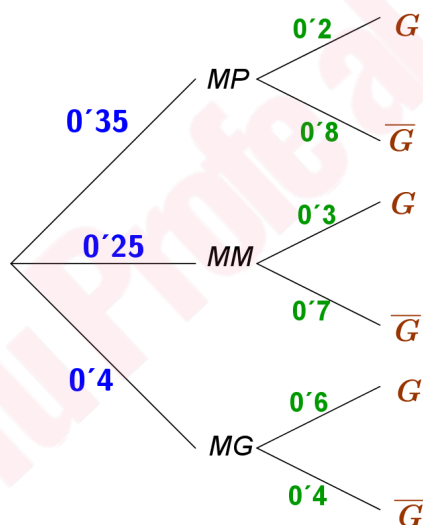
MM = la persona vive en un municipio mediano

MG = la persona vive en un municipio grande

G = la persona se graduó en la universidad

$\bar{G}$ = la persona no se graduó en la universidad

El árbol del problema es:



- Probabilidad de que la persona seleccionada se haya graduado en la universidad.

$$P(G) = 0.35 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.6 = 0.385$$

Solución: la probabilidad de que la persona seleccionada se haya graduado en la universidad es 0.385.

b) Si sabemos que la persona seleccionada se graduó en la universidad, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un municipio con más de 10 000 habitantes?

La persona vive en un municipio de más de 10000 habitantes = $MM \cup MG$

$$P\left(\frac{MM \cup MG}{G}\right) = \frac{P[(MM \cup MG) \cap G]}{P(G)}$$

$$P[(MM \cup MG) \cap G] = P[(MM \cap G) \cup (MG \cap G)] = \{\text{como } MM \text{ y } MG \text{ son sucesos incompatibles}\} = \\ = P(MM \cap G) + P(MG \cap G) = 0'25 \cdot 0'3 + 0'4 \cdot 0'6 = 0'315$$

$P(G) = 0'385$ (obtenida en el apartado anterior). Por tanto,

$$P\left(\frac{MM \cup MG}{G}\right) = \frac{0'315}{0'385} = \frac{9}{11} \cong 0'8182$$

Solución: la probabilidad pedida es $\frac{9}{11} \cong 0'8182$.

b) Probabilidad de la intersección de los sucesos "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" y "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes".

Los sucesos

$A =$ "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" = $MP \cup MM$

$B =$ "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes" = $G \cup MM \cup MG$

La intersección de estos dos sucesos será:

$$A \cap B = (MP \cup MM) \cap (G \cup MM \cup MG) =$$

Aplicando las propiedades distributivas de unión- intersección de sucesos,

$$= [MP \cap (G \cup MM \cup MG)] \cup [MM \cap (G \cup MM \cup MG)] = \\ = (MP \cap G) \cup (MP \cap MM) \cup (MP \cap MG) \cup (MM \cap G) \cup (MM \cap MM) \cup (MM \cap MG) =$$

como los sucesos MP , MN y MG son incompatibles entre sí las intersecciones entre ellos son el suceso nulo,

$$= (MP \cap G) \cup (\emptyset) \cup (\emptyset) \cup (MM \cap G) \cup (MM) \cup (\emptyset) = (MP \cap G) \cup (MM \cap G) \cup (MM) =$$

pero $(MM \cap G) \cup MM = MM$

$$= (MP \cap G) \cup MM$$

Por lo tanto, $A \cap B = (MP \cap G) \cup MM$

$$P(A \cap B) = 0'35 \cdot 0'2 + 0'25 = 0'32$$

Solución: la probabilidad de la intersección de los dos sucesos es 0'32.

Otra forma de resolverlo sería utilizando los diagramas de Venn.

MP	MM	MG
G	G	G
		G

El diagrama de Venn del problema sería:

MP	MM	MG
G	G	
	G	G

El suceso $A = MP \cup MM$ sería:

MP	MM	MG
G	G	
	G	G

El suceso $B = G \cup MM \cup MG$ sería:

MP	MM	MG
G	G	
	G	G

Y la intersección de estos dos sucesos:

Por lo tanto, $A \cap B = (MP \cap G) \cup MM$

$$P(A \cap B) = 0'35 \cdot 0'2 + 0'25 = 0'32$$