

El examen permite escoger cuatro preguntas entre ocho. Se desarrollan todas para repasar los dos bloques completos.

A.1. Discusión de un sistema con parámetro

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & 3 & k \\ 3 & k+1 & 2 \\ k & 2 & k \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 3 & k & 1 \\ 3 & k+1 & 2 & k-1 \\ k & 2 & k & 2 \end{array} \right).$$

Calculamos el determinante de A ; sus ceros son los únicos valores en los que el rango podría ser menor que 3:

$$\begin{aligned} \det A &= (k+1)(k(k+1)-4) - 3(3k-2k) + k(6-k(k+1)) \\ &= k^2 - 4 = (k-2)(k+2). \end{aligned}$$

Si $k \neq \pm 2$, el determinante no se anula, por lo que $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, igual al número de incógnitas; por Rouché-Frobenius el sistema es compatible determinado.

Caso $k = 2$. Las filas primera y segunda de A^* coinciden, mientras que la tercera no es proporcional a ellas. Por ejemplo, el menor de A con filas primera y tercera y columnas primera y tercera vale

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A) = 2$. Como en A^* hay dos filas independientes y la segunda repite la primera, también $\text{rg}(A^*) = 2$. Al ser los rangos iguales y menores que 3, el sistema es compatible indeterminado.

Caso $k = -2$. La tercera fila de A^* es la mitad de la primera menos la mitad de la segunda. Además, el menor de A formado por las dos primeras filas y columnas primera y segunda es

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

Luego $\text{rg}(A) = 2$ y, por la dependencia indicada, $\text{rg}(A^*) = 2$. Rouché-Frobenius vuelve a dar un sistema compatible indeterminado. **Conclusión.** El sistema es SCD si $k \neq \pm 2$ y SCI si $k = 2$ o $k = -2$; no hay ningún caso incompatible.

b) Resolución para $k = -3$

Al sustituir $k = -3$, el sistema queda

$$\begin{cases} -2x + 3y - 3z = 1, \\ 3x - 2y + 2z = -4, \\ -3x + 2y - 3z = 2. \end{cases}$$

Sumamos las dos últimas ecuaciones para obtener $-z = -2$, luego $z = 2$. Sustituimos en ellas:

$$3x - 2y = -8, \quad -2x + 3y = 7.$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones se obtiene $x = -2$, $y = 1$. La primera ecuación original se verifica:

$$-2(-2) + 3(1) - 3(2) = 1.$$

Conclusión. Para $k = -3$, la solución es $(x, y, z) = (-2, 1, 2)$.

A.2. Crecimiento, ceros e integral

La función $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x + x \cos x$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, pues seno y coseno lo están.

a) Crecimiento, existencia y unicidad del cero

Derivamos para determinar la monotonía:

$$f'(x) = -\cos x + \cos x - x \sin x = -x \sin x.$$

En $0 < x \leq \pi/2$, tanto x como $\sin x$ son positivos, luego $f'(x) < 0$ y f es estrictamente decreciente en $[0, \pi/2]$. Además,

$$f(0) = \frac{1}{2} > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0.$$

La función es continua y cambia de signo en los extremos; por el teorema de Bolzano tiene al menos un cero en $(0, \pi/2)$. Como es estrictamente decreciente, no puede anularse dos veces: el cero es único. **Conclusión.** La función decrece en $[0, \pi/2]$ y se anula exactamente una vez en $(0, \pi/2)$.

b) Integral

Integramos cada término. Para $x \cos x$ usamos integración por partes, con $u = x$ y $dv = \cos x \, dx$:

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} f(x) \, dx &= \left[\frac{x}{2} \right]_0^{\pi/2} + [\cos x]_0^{\pi/2} + [x \sin x + \cos x]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{4} - 1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{3\pi}{4} - 2. \end{aligned}$$

Conclusión. La integral definida vale $\frac{3\pi}{4} - 2$.

A.3. Triángulo, plano y simetría

a) Comprobar que el triángulo es rectángulo

Calculamos dos lados que parten de A :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3 - 0, -2 - (-4), 3 - 2) = (3, 2, 1),$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1 - 0, -3 - (-4), 3 - 2) = (-1, 1, 1).$$

Su producto escalar es

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3(-1) + 2(1) + 1(1) = 0.$$

Al ser perpendiculares, forman el ángulo recto en A . Por tanto, AB y AC son los catetos y BC es la hipotenusa.

Conclusión. El triángulo es rectángulo en A .

b) Plano por A, B y C

Un vector normal al plano se obtiene con el producto vectorial de los dos catetos:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -4, 5).$$

Usamos el punto $A = (0, -4, 2)$ en la forma punto-normal:

$$(1, -4, 5) \cdot (x, y + 4, z - 2) = 0.$$

Conclusión. Una ecuación general del plano es $x - 4y + 5z - 26 = 0$.

c) Simétrico de A respecto de la recta BC

La recta debe escribirse en forma paramétrica. Su punto $B = (3, -2, 3)$ y su vector director es

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1 - 3, -3 - (-2), 3 - 3) = (-4, -1, 0),$$

por lo que

$$BC : \begin{cases} x = 3 - 4t, \\ y = -2 - t, \\ z = 3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

El pie H de la perpendicular desde A a la recta tiene parámetro

$$t_H = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2} = \frac{(-3, -2, -1) \cdot (-4, -1, 0)}{(-4)^2 + (-1)^2} = \frac{14}{17}.$$

Así,

$$H = B + \frac{14}{17} \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{5}{17}, -\frac{48}{17}, 3 \right).$$

Como H es el punto medio entre A y su simétrico A' , se tiene

$$A' = 2H - A = \left(-\frac{10}{17}, -\frac{96}{17} + 4, 6 - 2 \right) = \left(-\frac{10}{17}, -\frac{28}{17}, 4 \right).$$

Conclusión. El simétrico de A respecto de BC es $\left(-\frac{10}{17}, -\frac{28}{17}, 4 \right)$.

A.4. Extracciones de fichas sin reemplazamiento

Entre los números del 1 al 20 hay 6 múltiplos de 3, 3 múltiplos de 6 y 10 números impares. Como las extracciones son sucesivas y no se repone la primera ficha, después de extraer quedan 19 fichas.

a) Dos múltiplos de 3

Hay 6 opciones para la primera ficha y 5 múltiplos de 3 para la segunda:

$$P = \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{38}.$$

Conclusión. La probabilidad es $\frac{3}{38}$.

b) Primero múltiplo de 6 y después múltiplo de 3

Todo múltiplo de 6 también es múltiplo de 3. Tras extraerlo quedan 5 múltiplos de 3 entre las 19 fichas:

$$P = \frac{3}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{76}.$$

Conclusión. La probabilidad es $\frac{3}{76}$.

c) Ninguna ficha es múltiplo de 2

Esto equivale a que ambas fichas sean impares. Después de elegir una de las 10 impares, quedan 9 impares entre 19:

$$P = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{38}.$$

Conclusión. La probabilidad es $\frac{9}{38}$.

d) Segunda ficha impar sabiendo que la primera fue impar

Una vez sabemos que la primera ficha fue impar, quedan 19 fichas, de las cuales 9 son impares. Por tanto,

$$P(\text{segunda impar} \mid \text{primera impar}) = \frac{9}{19}.$$

Conclusión. La probabilidad condicionada es $\frac{9}{19}$.

B.1. Determinantes y operaciones con matrices

Las matrices son

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determinante de A

De $AB = BC$ y $\det B = 2 \neq 0$ se deduce que $A = BCB^{-1}$. Usando que el determinante de un producto es el producto de los determinantes,

$$\det A = \det(B) \det(C) \det(B^{-1}) = \det(B) \det(C) \frac{1}{\det(B)} = \det(C) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Conclusión. $\det A = 6$.

b) Cálculo de BCB^{-1}

Primero calculamos

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz B verifica $B^{-1} = -I + \frac{1}{2}J$, donde J es la matriz de unos:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos ahora las matrices obtenidas:

$$BCB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Conclusión. $BCB^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$

c) Resolver $BC(x, y, z)^T = (1, 2, 3)^T$

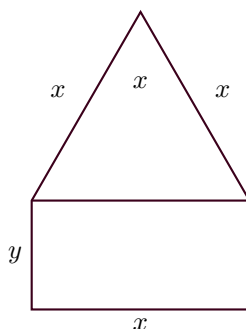
Como ya hemos calculado BC , el sistema es

$$\begin{cases} 2y + 3z = 1, \\ x + 3z = 2, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación de la tercera se obtiene $2y - 3z = 1$. Junto con $2y + 3z = 1$, esto da $z = 0$ e $y = 1/2$; la segunda ecuación proporciona $x = 2$. **Conclusión.** $(x, y, z) = (2, 1/2, 0)$.

B.2. Optimización de la estructura

Denotamos por x la base del triángulo equilátero y por y la altura del rectángulo. La figura muestra las seis piezas: cuatro tramos de longitud x y los dos lados verticales de longitud y .



a) Altura del triángulo

La altura de un triángulo equilátero de lado x se obtiene trazando la altura, que divide la base en dos segmentos de longitud $x/2$. Por Pitágoras,

$$h_{\Delta} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Conclusión. La altura del triángulo es $h_{\Delta}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

b) Dimensiones que maximizan el área

La barra se reparte entre dos bases horizontales de longitud x , dos lados inclinados del triángulo de longitud x y dos lados verticales del rectángulo de longitud y . Por tanto,

$$4x + 2y = 10 \implies y = 5 - 2x.$$

La longitud debe ser positiva y $y \geq 0$, así que $0 < x \leq 5/2$. El área total es la suma del rectángulo y el triángulo:

$$S(x) = xy + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = x(5 - 2x) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 5x - \frac{8 - \sqrt{3}}{4}x^2.$$

Buscamos el máximo derivando:

$$S'(x) = 5 - \frac{8 - \sqrt{3}}{2}x = 0 \implies x = \frac{10}{8 - \sqrt{3}}.$$

Este valor pertenece al dominio; además, $S'(x) > 0$ antes de él y $S'(x) < 0$ después, por lo que da un máximo. La altura del rectángulo es

$$y = 5 - \frac{20}{8 - \sqrt{3}} = \frac{145 - 20\sqrt{3}}{61}.$$

La longitud óptima de la base es

$$x = \frac{80 + 10\sqrt{3}}{61} \text{ m},$$

y el área máxima resulta

$$S_{\text{máx}} = \frac{25}{8 - \sqrt{3}} = \frac{200 + 25\sqrt{3}}{61} \text{ m}^2.$$

Conclusión. Hay que cortar cuatro piezas de longitud $x = \frac{80 + 10\sqrt{3}}{61}$ m y dos de longitud $y = \frac{145 - 20\sqrt{3}}{61}$ m.

B.3. Rectas y perpendicular común

La recta r es la intersección de los planos dados. Tomamos $z = t$; entonces $x = t$ y $x + 2y - z = 4$ da $y = 2$. Así, en forma paramétrica,

$$r : \begin{cases} x = t, \\ y = 2, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{d}_r = (1, 0, 1).$$

La otra recta es

$$s : \begin{cases} x = \frac{1}{4} - u, \\ y = \frac{1}{4} + u, \\ z = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}, \quad \vec{d}_s = (-1, 1, 0).$$

a) Posición relativa

Los vectores directores no son proporcionales. Para comprobar si las rectas son coplanarias usamos

$$P_r = (0, 2, 0), \quad P_s = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \quad \overrightarrow{P_r P_s} = P_s - P_r = \left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

El producto mixto vale

$$(\vec{d}_r \times \vec{d}_s) \cdot \overrightarrow{P_r P_s} = (-1, -1, 1) \cdot \left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right) = 2 \neq 0.$$

Por tanto, no están en un mismo plano; como tampoco son paralelas, son alabeadas. **Conclusión.** r y s son rectas alabeadas.

b) Plano por r y la dirección perpendicular a ambas

Un vector perpendicular a las dos direcciones se obtiene mediante el producto vectorial:

$$\vec{v} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-1, -1, 1).$$

El plano pedido contiene los vectores $\vec{d}_r$ y $\vec{v}$. Por tanto, un vector normal es

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{v} = (1, -2, -1).$$

Usando el punto $P_r = (0, 2, 0)$:

$$\vec{n} \cdot (x, y - 2, z) = 0.$$

Conclusión. Una ecuación general del plano es $x - 2y - z + 4 = 0$.

c) Perpendicular común

Sean $P(t) = (t, 2, t) \in r$ y $Q(u) = (1/4 - u, 1/4 + u, 1/2) \in s$. La perpendicular común debe tener una dirección ortogonal a ambos vectores directores; por eso imponemos que $Q - P$ sea perpendicular a $\vec{d}_r$ y a $\vec{d}_s$:

$$(Q - P) \cdot (1, 0, 1) = 0 \implies u + 2t = \frac{3}{4},$$

$$(Q - P) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \implies 2u + t = 2.$$

Resolviendo, $t = -1/6$ y $u = 13/12$. El punto de r es

$$P = \left(-\frac{1}{6}, 2, -\frac{1}{6}\right),$$

y la dirección común perpendicular es $\vec{v} = (-1, -1, 1)$. Así, la perpendicular común en forma paramétrica es

$$\ell : \begin{cases} x = -\frac{1}{6} - \lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = -\frac{1}{6} + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta ℓ es perpendicular a r y a s y corta a ambas.

B.4. Distribución normal de pesos

La variable X sigue una normal de media $\mu = 3353$ g. Tipificamos con

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

a) Desviación típica

El dato $P(X > 3693) = 0,2$ implica que el valor tipificado z deja a su derecha un área 0,2; por tanto, su probabilidad acumulada es 0,8. En la tabla normal, $\Phi(0,84) = 0,7995 \approx 0,8$, así que

$$\frac{3693 - 3353}{\sigma} \approx 0,84 \implies \sigma \approx \frac{340}{0,84} \approx 404,8 \text{ g.}$$

Conclusión. La desviación típica es aproximadamente 405 g.

b) Cuantil inferior del 20 %

Como la normal es simétrica respecto de su media, el valor que deja un 20 % a la izquierda está a la misma distancia de la media que 3693 g, que deja un 20 % a la derecha. Luego

$$x_0 = 2\mu - 3693 = 2(3353) - 3693 = 3013 \text{ g.}$$

Conclusión. $x_0 = 3013$ g.