

Julio de 2022 · Convocatoria extraordinaria

El examen permite escoger tres problemas de los seis propuestos. Para que puedas estudiar todos los métodos, aquí están resueltos los seis. En cada apartado primero se indica la idea matemática y después se aplican los datos del enunciado paso a paso.

Problema 1. Discusión de un sistema con parámetro

Estudiaremos el número de soluciones según el valor de a . Para ello usamos el teorema de Rouché-Frobenius: el sistema tiene solución si y solo si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$; si ambos rangos coinciden con el número de incógnitas hay una única solución, y si coinciden pero son menores hay infinitas.

El sistema y sus matrices son

$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + z = 1, \\ x + ay + (a-1)z = a, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{pmatrix}.$$

Calculamos primero el determinante de A . Si no es cero, las tres filas son independientes y el rango es 3:

$$\det A = a \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & a-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix} = -a^2 - (a-2) = -(a-1)(a+2).$$

Por tanto, $\det A \neq 0$ cuando $a \neq 1$ y $a \neq -2$. En esos casos $\text{rg}(A) = 3$, y también $\text{rg}(A^*) = 3$, porque A es una submatriz de A^* y esta solo tiene tres filas. Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado (SCD).

Para hallar la solución, de la segunda ecuación $z = 1 - x$, y de la primera $y = 1 - ax$. Sustituimos ambas expresiones en la tercera:

$$x + a(1 - ax) + (a-1)(1 - x) = a \implies -(a-1)(a+2)x = -(a-1).$$

Como en este caso $a \neq 1, -2$, podemos dividir por $-(a-1)(a+2)$:

$$x = \frac{1}{a+2}, \quad y = 1 - a \frac{1}{a+2} = \frac{2}{a+2}, \quad z = 1 - \frac{1}{a+2} = \frac{a+1}{a+2}.$$

Así, para $a \neq 1, -2$, la solución única es

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{a+2}, \frac{2}{a+2}, \frac{a+1}{a+2} \right).$$

Estudiamos ahora los dos valores que anulan el determinante.

Caso $a = 1$. La matriz de coeficientes queda

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las filas primera y tercera son iguales, así que $\text{rg}(A_1) \leq 2$. El menor de orden 2 formado por las dos primeras filas y las columnas de x, y vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A_1) = 2$. En la ampliada, las filas primera y tercera siguen siendo iguales, y el mismo menor no nulo demuestra que $\text{rg}(A_1^*) = 2$. Los rangos coinciden, pero son menores que el número de incógnitas (3): el sistema es compatible indeterminado (SCI).

Las dos ecuaciones distintas son $x + y = 1$ y $x + z = 1$. Tomando $x = t$, con $t \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$(x, y, z) = (t, 1-t, 1-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Caso $a = -2$. Las filas de la matriz de coeficientes son

$$F_1 = (-2, 1, 0), \quad F_2 = (1, 0, 1), \quad F_3 = (1, -2, -3), \quad F_3 = -2F_1 - 3F_2.$$

Las dos primeras filas son independientes, luego $\text{rg}(A_{-2}) = 2$. Sin embargo, la misma combinación aplicada a los términos independientes daría $-2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -5$, y el tercer término independiente es -2 . La dependencia no se

conserva en la ampliada. Lo verificamos con un menor de orden 3 de A_{-2}^* , usando las columnas de x, y y la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A_{-2}^*) = 3 \neq 2 = \text{rg}(A_{-2})$, y el sistema es incompatible (SI), sin solución.

En conclusión: hay una solución si $a \neq 1, -2$; infinitas soluciones si $a = 1$; y ninguna solución si $a = -2$.

Problema 2. Inversa, potencias y determinante

La matriz del enunciado es

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

a) Determinación de a y b . Para que exista la inversa, el determinante debe ser distinto de cero. La fórmula de la inversa de una matriz 2×2 da

$$\det A = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a-b & -1 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+b} & -\frac{1}{(a+b)(a-b)} \\ 0 & \frac{1}{a-b} \end{pmatrix}.$$

El enunciado pide que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Igualando las entradas de la diagonal, $1/(a+b) = 1$ y $1/(a-b) = 1$, resulta

$$a+b = 1, \quad a-b = 1.$$

Sumando las ecuaciones: $2a = 2$, luego $a = 1$. Al sustituir, $b = 0$. La entrada restante también coincide, pues $-1/((1)(1)) = -1$. Por tanto,

$$a = 1, \quad b = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Potencias de la matriz obtenida. Multiplicamos las matrices de forma sucesiva:

$$A^2 = A A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En general, si $N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $N^2 = 0$. Por el desarrollo binomial, $(I + N)^n = I + nN$, así que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ para los exponentes naturales.}$$

c) Determinante de la potencia inversa. Para una matriz invertible se cumple $\det(A^{-5}) = (\det A)^{-5}$. Por tanto, con los parámetros antes de sustituir,

$$\det(A^{-5}) = \frac{1}{(a^2 - b^2)^5}, \quad a^2 - b^2 \neq 0.$$

Para los valores hallados en el apartado a), $a = 1, b = 0$, queda

$$\det(A^{-5}) = \frac{1}{(1^2 - 0^2)^5} = 1.$$

Problema 3. Rectas, plano y distancia

Trabajamos en coordenadas cartesianas. Una recta se escribirá en forma paramétrica; un plano, en forma general $Ax + By + Cz + D = 0$.

a) Plano que contiene a s y es paralelo a r . La recta r pasa por $A = (2, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$. Su vector director se obtiene restando los puntos:

$$\vec{d}_r = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 1, 0).$$

Por tanto, la ecuación paramétrica es

$$r : (x, y, z) = (2, 0, 0) + \lambda(-2, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R},$$

es decir, $x = 2 - 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = 0$.

En la recta s , igualamos las expresiones a un parámetro t :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z = t.$$

De aquí se leen el punto $P = (1, 1, 0)$ y el vector director $\vec{d}_s = (2, 3, 1)$, y su forma paramétrica es

$$s : (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(2, 3, 1), t \in \mathbb{R}.$$

El plano buscado contiene las direcciones $\vec{d}_s$ y $\vec{d}_r$. Un vector normal se obtiene mediante el producto vectorial:

$$\vec{n} = \vec{d}_s \times \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -2, 8).$$

Usamos la ecuación punto-normal del plano, con punto P :

$$-1(x-1) - 2(y-1) + 8(z-0) = 0 \implies x + 2y - 8z - 3 = 0.$$

Así, en forma general,

$$\pi : x + 2y - 8z - 3 = 0.$$

b) Distancia de A a la recta s . La distancia de un punto A a una recta que pasa por P con vector director $\vec{d}_s$ es el área del paralelogramo generado por $\overrightarrow{PA}$ y $\vec{d}_s$, dividida entre la longitud de la base $\vec{d}_s$:

$$d(A, s) = \frac{\|\overrightarrow{PA} \times \vec{d}_s\|}{\|\vec{d}_s\|}.$$

Aquí $\overrightarrow{PA} = A - P = (1, -1, 0)$, por lo que

$$\overrightarrow{PA} \times \vec{d}_s = (1, -1, 0) \times (2, 3, 1) = (-1, -1, 5),$$

$$\|(-1, -1, 5)\| = \sqrt{1+1+25} = 3\sqrt{3}, \quad \|(2, 3, 1)\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}.$$

En consecuencia,

$$d(A, s) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = 3\sqrt{\frac{3}{14}}.$$

Problema 4. Proyección ortogonal y área de un triángulo

El plano es $\pi : 2x + 2y + z = 3$, así que un vector normal es $\vec{n} = (2, 2, 1)$. La recta perpendicular al plano que pasa por $B = (3, 2, 3)$ tiene como dirección ese vector normal:

$$(x, y, z) = (3, 2, 3) + t(2, 2, 1), t \in \mathbb{R}.$$

El punto de corte de esta recta con el plano es el pie C de la perpendicular. Sustituimos $x = 3 + 2t$, $y = 2 + 2t$, $z = 3 + t$ en la ecuación general del plano:

$$2(3 + 2t) + 2(2 + 2t) + (3 + t) = 3 \implies 13 + 9t = 3 \implies t = -\frac{10}{9}.$$

Luego

$$C = (3, 2, 3) - \frac{10}{9}(2, 2, 1) = \left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right).$$

Para el área de un triángulo usamos $S = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$. Con $A = (2, 1, -2)$, calculamos por separado:

$$\vec{AB} = B - A = (1, 1, 5), \quad \vec{AC} = C - A = \left(-\frac{11}{9}, -\frac{11}{9}, \frac{35}{9}\right).$$

Entonces

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \left(\frac{35}{9} + \frac{55}{9}, -\frac{55}{9} - \frac{35}{9}, 0\right) = (10, -10, 0).$$

Su módulo es $\sqrt{10^2 + (-10)^2} = 10\sqrt{2}$. Por tanto,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

Problema 5. Primitiva, integral definida y parámetro

a) Integral indefinida. El integrando está definido cuando el denominador no es cero. Factorizamos:

$$x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2),$$

así que el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-2, 7\}$. Para integrar, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{18}{(x - 7)(x + 2)} = \frac{A}{x - 7} + \frac{B}{x + 2}.$$

Al multiplicar por $(x - 7)(x + 2)$, queda $18 = A(x + 2) + B(x - 7)$. Tomando $x = 7$, resulta $A = 2$; tomando $x = -2$, resulta $B = -2$. Integramos término a término usando $\int dx/(x - c) = \ln|x - c| + C$:

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx = \int \left(\frac{2}{x - 7} - \frac{2}{x + 2} \right) dx = 2 \ln|x - 7| - 2 \ln|x + 2| + C.$$

Por tanto, una primitiva es

$$2 \ln|x - 7| - 2 \ln|x + 2| + C, \quad x \in (-\infty, -2), (-2, 7) \text{ o } (7, \infty).$$

b) Cálculo de $I(t) = \int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$, para $t > 8$. En todo el intervalo $[8, t]$, el denominador no se anula, pues $x > 8 > 7$. Aplicamos el teorema fundamental del cálculo y evaluamos la primitiva en los dos extremos:

$$I(t) = [2 \ln|x - 7| - 2 \ln|x + 2|]_8^t = (2 \ln(t - 7) - 2 \ln(t + 2)) - (2 \ln 1 - 2 \ln 10).$$

Como $\ln 1 = 0$, simplificamos:

$$I(t) = 2 \ln \left(\frac{t - 7}{t + 2} \right) + 2 \ln 10 = 2 \ln \left(\frac{10(t - 7)}{t + 2} \right), \quad t > 8.$$

c) Valor de t para el que $I(t) = \ln(25/4)$. Sustituimos la expresión hallada y usamos que los argumentos de los logaritmos son positivos porque $t > 8$:

$$2 \ln \left(\frac{10(t - 7)}{t + 2} \right) = \ln \left(\frac{25}{4} \right) = 2 \ln \left(\frac{5}{2} \right).$$

Dividimos entre 2 y aplicamos que el logaritmo es inyectivo:

$$\frac{10(t - 7)}{t + 2} = \frac{5}{2} \implies 20(t - 7) = 5(t + 2) \implies 15t = 150 \implies t = 10.$$

El valor cumple la condición $t > 8$, así que la respuesta es $t = 10$.

Problema 6. Área máxima de un rectángulo

La curva es $f(x) = e^{-x^2}$, y el punto de la curva que fija el vértice superior derecho del rectángulo tiene abscisa $x > 0$. La función exponencial está definida para todo exponente real y $-x^2$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$; por tanto, el dominio de f es $\mathbb{R}$. En este problema, además, la condición geométrica restringe la elección a $x > 0$.

La base del rectángulo mide x y su altura mide $f(x) = e^{-x^2}$. Por la fórmula **área = base · altura**, el área en función de x es

$$A(x) = xe^{-x^2}, \quad x > 0.$$

Buscamos sus puntos críticos derivando con la regla del producto y la regla de la cadena:

$$A'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Como $e^{-x^2} > 0$ para todo real, la derivada se anula exactamente cuando

$$1 - 2x^2 = 0 \implies x^2 = \frac{1}{2} \implies x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

donde elegimos la raíz positiva porque el dominio geométrico es $x > 0$.

Comprobamos el signo de la derivada en un valor de prueba de cada intervalo. Como el factor e^{-x^2} siempre es positivo, basta con estudiar el signo de $1 - 2x^2$:

Intervalo	Valor de prueba en $(1 - 2x^2)$	Signo de $A'(x)$ y comportamiento
$0 < x < 1/\sqrt{2}$	$x = 1/2 : 1 - 2(1/2)^2 = 1/2$	+
$x > 1/\sqrt{2}$	$x = 1 : 1 - 2(1)^2 = -1$	-

La derivada cambia de positiva a negativa, así que en $x = 1/\sqrt{2}$ hay un máximo. Además, comprobamos los extremos del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{-x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2} = 0,$$

pues la exponencial decrece más rápidamente que el factor lineal crece. Así, el máximo hallado es también el máximo absoluto para $x > 0$.

La altura en ese punto y el área máxima son, respectivamente,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad A_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Por tanto, el vértice indicado y el área máxima quedan

$$M = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right), \quad A_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2e}} \text{ unidades cuadradas.}$$