



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d) Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.
- e) En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- h) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- i) Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Se sabe que la suma de tres números naturales es 22 y que la suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61. ¿Puede ser 15 uno de los tres números? En caso afirmativo, calcula los restantes. ¿Existen otras opciones?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula el valor de k para que $\int_1^3 e^{x-k} (x-2) dx = 2$.



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv mx - y - 2z = 5$.

- a) [1,5 puntos] Halla m para que r y π sean paralelos.
b) [1 punto] Para $m = -8$, calcula la distancia de la recta r al plano π .

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las rectas $r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases}$.

- a) [1 punto] Estudia la posición relativa de las rectas r y s .
b) [1,5 puntos] Halla la ecuación de un plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s .

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que

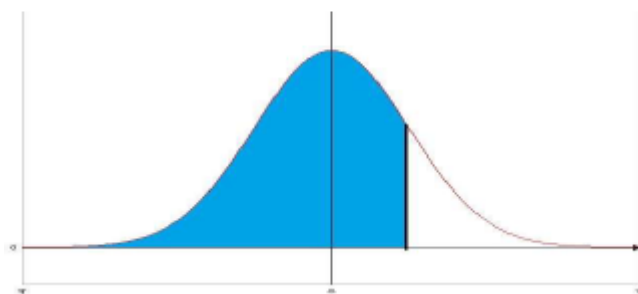
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)}{bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)} = 1$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

La velocidad máxima a la que puede circular un vehículo sobre un determinado puente del río Guadalquivir es de 70 km/h.

- a) [1 punto] En uno de los sentidos de circulación, la velocidad de los vehículos sigue una distribución normal de media 64 km/h y desviación típica 4 km/h. Si el radar de control salta a partir de 72 km/h, ¿cuál es el porcentaje de vehículos que se sancionan?
b) [1,5 puntos] En el sentido contrario, también sigue una distribución normal de la que sabemos que la velocidad media es de 63,6 km/h y que el 5,05% de todos los vehículos viaja a más de 80 km/h. En este caso, ¿cuánto vale la desviación típica?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $N(0, 1)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Se sabe que la suma de tres números naturales es 22 y que la suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61. ¿Puede ser 15 uno de los tres números? En caso afirmativo, calcula los restantes. ¿Existen otras opciones?

a) Llamamos “x”, “y”, “z” a los tres números naturales.

Obtenemos las ecuaciones que cumplen los números con los datos del problema.

“La suma de tres números naturales es 22” $\rightarrow x + y + z = 22$

“La suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61” $\rightarrow 4x + 3y + 2z = 61$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo intentamos resolver.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 22 \\ 4x + 3y + 2z = 61 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 22 - x - z \\ 4x + 3y + 2z = 61 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x + 3(22 - x - z) + 2z = 61 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 66 - 3x - 3z + 2z = 61 \Rightarrow x - z = -5 \Rightarrow z = x + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 22 - x - x - 5 = 17 - 2x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{N} \\ z = 5 + \lambda \end{cases}}$$

Las soluciones son infinitas. Comprobamos si alguna de estas soluciones tiene un número que sea 15.

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \lambda = 15 \\ y = 17 - 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 17 - 2 \cdot 15 = -13 \notin \mathbb{N} \text{ ¡Mal!} \\ z = 5 + 15 = 20 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda = 15 \rightarrow -2\lambda = -2 \rightarrow \lambda = 1 \\ z = 5 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 5 + 1 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡¡OK!!}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda \\ z = 5 + \lambda = 15 \rightarrow \lambda = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 17 - 20 = -3 \notin \mathbb{N} \text{ ¡Mal!} \end{array} \right\}$$

Existe una solución con uno de los números valiendo 15 es la solución $x = 1, y = 15, z = 6$. Esta combinación de números naturales cumple lo pedido.

Las soluciones tienen la expresión $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{N} \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$. Damos valores a λ y obtenemos las restantes opciones.

$$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 17 - 2 \cdot 1 = 15 \\ z = 5 + 1 = 6 \end{cases}$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 17 - 2 \cdot 2 = 13 \\ z = 5 + 2 = 7 \end{cases}$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 17 - 2 \cdot 3 = 11 \\ z = 5 + 3 = 8 \end{cases}$$

$$\lambda = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 17 - 2 \cdot 4 = 9 \\ z = 5 + 4 = 9 \end{cases}$$

$$\lambda = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 17 - 2 \cdot 5 = 7 \\ z = 5 + 5 = 10 \end{cases}$$

$$\lambda = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 17 - 2 \cdot 6 = 5 \\ z = 5 + 6 = 11 \end{cases}$$

$$\lambda = 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 17 - 2 \cdot 7 = 3 \\ z = 5 + 7 = 12 \end{cases}$$

$$\lambda = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 17 - 2 \cdot 8 = 1 \\ z = 5 + 8 = 13 \end{cases}$$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Comprobamos si se puede descomponer la fracción en fracciones simples.

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \text{No existe}$$

No podemos descomponer la fracción en otras fracciones más sencillas. Utilizamos otro método de integración.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{(x+1)^2 + 1}$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x+1 = t \Rightarrow dx = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg(t) = \arctg(x+1) + K$$

La primitiva de la función es $F(x) = \arctg(x+1) + K$. Determinamos el valor de K para que

$$F(0) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\left. \begin{array}{l} F(0) = \frac{\pi}{4} \\ F(x) = \arctg(x+1) + K \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \arctg(0+1) + K \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + K \Rightarrow \boxed{K=0}$$

La primitiva de la función que cumple lo pedido es $F(x) = \arctg(x+1)$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula el valor de k para que $\int_1^3 e^{x-k} (x-2) dx = 2$.

Calculamos la integral indefinida.

$$\int e^{x-k} (x-2) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x-2 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{x-k} dx \rightarrow v = \int e^{x-k} dx = e^{x-k} \end{array} \right\} = (x-2)e^{x-k} - \int e^{x-k} dx =$$

$$= (x-2)e^{x-k} - e^{x-k} = (x-3)e^{x-k} + C$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida.

$$\int_1^3 e^{x-k} (x-2) dx = \left[(x-3)e^{x-k} \right]_1^3 = (3-3)e^{3-k} - (1-3)e^{1-k} = 2e^{1-k}$$

Averiguamos el valor de k para que esta integral definida valga 2.

$$\int_1^3 e^{x-k} (x-2) dx = 2 \Rightarrow 2e^{1-k} = 2 \Rightarrow e^{1-k} = 1 = e^0 \Rightarrow 1-k = 0 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

Para que se pueda cumplir lo pedido debe ser $k=1$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv mx - y - 2z = 5$.

a) [1,5 puntos] Halla m para que r y π sean paralelos.

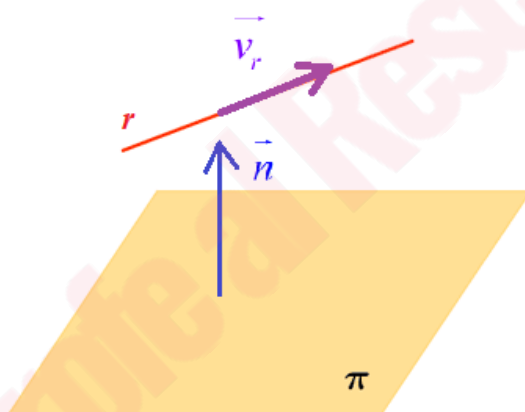
b) [1 punto] Para $m = -8$, calcula la distancia de la recta r al plano π .

a) Hallamos un punto, un vector director y las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 + y - x \\ x + 2y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow x + 2y - 3 - y + x = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - 2x \Rightarrow z = 3 + 7 - 2x - x = 10 - 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 7 - 2\alpha \\ z = 10 - 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -2, -3) \\ P_r(0, 7, 10) \end{cases}$$



Para que la recta y el plano sean paralelos el vector normal del plano y el vector director de la recta deben ser perpendiculares y para ello su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -2, -3) \\ \pi \equiv mx - y - 2z = 5 \rightarrow \vec{n} = (m, -1, -2) \\ \vec{v}_r \perp \vec{n} \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1, -2, -3)(m, -1, -2) = 0 \Rightarrow$$

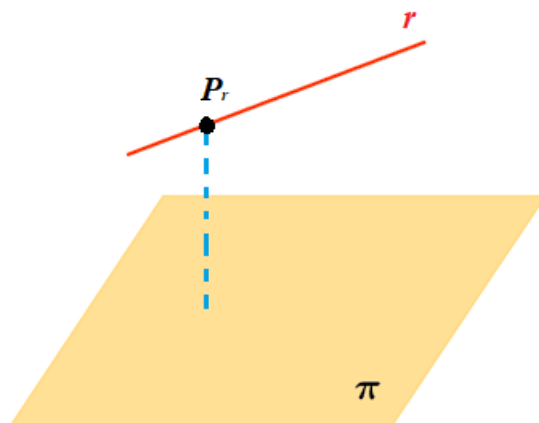
$$\Rightarrow m + 2 + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -8}$$

Para $m = -8$ el plano queda $\pi \equiv -8x - y - 2z = 5$. Con esta condición sabemos que la recta es paralela al plano o está contenida en él. Vemos si el punto $P_r(0, 7, 10)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -8x - y - 2z = 5 \\ \text{¿} P_r(0, 7, 10) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} -8 \cdot 0 - 7 - 2 \cdot 10 = 5? \Rightarrow \text{¿} -7 - 20 = 5? \text{ ¡NO!}$$

El punto P_r no pertenece al plano por lo que la recta no está contenida en el plano y podemos afirmar que para $m = -8$ la recta es paralela al plano.

- b) Para $m = -8$ el plano queda $\pi \equiv -8x - y - 2z = 5$ y la recta es paralela al plano. La distancia de la recta al plano es la distancia de cualquiera de sus puntos al plano.



$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -8x - y - 2z - 5 = 0 \\ P_r(0, 7, 10) \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|-8 \cdot 0 - 7 - 2 \cdot 10 - 5|}{\sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \boxed{\frac{32\sqrt{69}}{69}}$$

Para $m = -8$ la distancia de la recta r al plano π vale $\frac{32\sqrt{69}}{69}$ unidades.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las rectas $r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases}$.

- a) [1 punto] Estudia la posición relativa de las rectas r y s .
 b) [1,5 puntos] Halla la ecuación de un plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s .

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-1, -2, 2) \\ \vec{v}_r = (4, 3, -1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(1, 2, -3) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -2) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (4, 3, -1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{-1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{-1}{-2}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \vec{P_rQ_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (4, 3, -1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -2) \\ \vec{P_rQ_s} = (1, 2, -3) - (-1, -2, 2) = (2, 4, -5) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \vec{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -20 - 12 + 4 + 2 - 15 + 32 = -7 \neq 0$$

El producto mixto tiene un valor distinto de cero. Las rectas se cruzan.

- b) Una recta perpendicular a las rectas r y s tiene como vector director el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (4, 3, -1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w}_t = \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5i + 9j + 7k = (-5, 9, 7)$$

El plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s contiene el punto $P_r(-1, -2, 2)$ de la recta r y tiene como vectores directores $\vec{v}_r = (4, 3, -1)$ y $\vec{w}_t = \vec{v}_r \times \vec{u}_s = (-5, 9, 7)$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(-1, -2, 2) \in \pi \\ \vec{v}_r = (4, 3, -1) \\ \vec{w}_t = \vec{v}_r \times \vec{u}_s = (-5, 9, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-2 \\ 4 & 3 & -1 \\ -5 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21(x+1) + 5(y+2) + 36(z-2) + 15(z-2) - 28(y+2) + 9(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30(x+1) - 23(y+2) + 51(z-2) = 0 \Rightarrow 30x + 30 - 23y - 46 + 51z - 102 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: 30x - 23y + 51z - 118 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: 30x - 23y + 51z - 118 = 0$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)}{bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)} = 1$$

Calculamos el límite indicado.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)}{bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)} &= \frac{0 \cdot \operatorname{sen}(0) + a(e^0 - 1) + \operatorname{sen}(0)}{b \cdot 0^2 + 0 - \operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{0} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) + x \cos(x) + ae^x + \cos(x)}{2bx + 1 - \cos(x)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}(0) + 0 \cdot \cos(0) + ae^0 + \cos(0)}{2b \cdot 0 + 1 - \cos(0)} = \frac{0 + 0 + a + 1}{0 + 1 - 1} = \frac{1 + a}{0} = \dots \end{aligned}$$

Para que este límite no valga ∞ debe ser el numerador igual a cero para que surja una indeterminación y sigamos con su cálculo. Es decir, debe ser $a = -1$. Seguimos con el cálculo del límite considerando que $a = -1$.

$$\begin{aligned} \dots = \{a = -1\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) + x \cos(x) - e^x + \cos(x)}{2bx + 1 - \cos(x)} = \frac{0}{0} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + \cos(x) - x \operatorname{sen}(x) - e^x - \operatorname{sen}(x)}{2b + \operatorname{sen}(x)} = \\ &= \frac{\cos(0) + \cos(0) - 0 \cdot \operatorname{sen}(0) - e^0 - \operatorname{sen}(0)}{2b + \operatorname{sen}(0)} = \frac{2 - 1}{2b} = \boxed{\frac{1}{2b}} \end{aligned}$$

Igualamos el valor del límite a 1 y obtenemos el valor de b .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)}{bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)} = 1 \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)}{bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)}}} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{1}{2b} = 1 \Rightarrow 1 = 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2} \\ a = -1 \end{array}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = \frac{1}{2}$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

La velocidad máxima a la que puede circular un vehículo sobre un determinado puente del río Guadalete es de 70 km/h.

- a) [1 punto] En uno de los sentidos de circulación, la velocidad de los vehículos sigue una distribución normal de media 64 km/h y desviación típica 4 km/h. Si el radar de control salta a partir de 72 km/h, ¿cuál es el porcentaje de vehículos que se sancionan?
- b) [1,5 puntos] En el sentido contrario, también sigue una distribución normal de la que sabemos que la velocidad media es de 63,6 km/h y que el 5,05% de todos los vehículos viaja a más de 80 km/h. En este caso, ¿cuánto vale la desviación típica?

- a) X = velocidad de los vehículos en uno de los sentidos de circulación. $X = N(64, 4)$.
Calculamos la probabilidad de que un vehículo supere los 72 km/h: $P(X > 72)$.

$$P(X > 72) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z > \frac{72-64}{4}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

El porcentaje de vehículos que se sancionan es del 2.28 %.

- b) Y = velocidad de los vehículos en el otro de los sentidos de circulación. $Y = N(63.6, \sigma)$.
Sabemos que $P(Y > 80) = 0.0505$. Determinamos el valor de σ usando esta información.

$$P(Y > 80) = 0.0505 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z > \frac{80-63.6}{\sigma}\right) = 0.0505 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{16.4}{\sigma}\right) = 1 - 0.0505 = 0.9495 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16.4}{\sigma} = 1.64 \Rightarrow \sigma = \frac{16.4}{1.64} = 10$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591

La desviación típica tiene un valor de 10 km/h.