

Convocatoria extraordinaria de 2021

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

Usamos $1 - \cos x = x^2/2 + o(x^2)$, $\sin x = x + o(x^2)$ y $e^x - 1 = x + x^2/2 + o(x^2)$. Para que el cociente tenga límite finito, el coeficiente lineal debe anularse: $b - 2 = 0$. El coeficiente de x^2 queda $a/2 - 1 = 7$, luego $a = 16$, $b = 2$.

Ejercicio 2

La condición de punto crítico en $x = 1$ impone $f'(1) = 0$. Derivando,

$$f'(x) = \frac{2bx(1 - ax^4)}{(1 + ax^4)^2}.$$

Como $b > 0$, resulta $a = 1$. Además, el punto $(1, 2)$ pertenece a la gráfica, así que $b/(1 + a) = 2$ y $b = 4$. Por tanto, $a = 1$, $b = 4$.

Ejercicio 3

Por el teorema fundamental del cálculo, $f'(x) = xe^x$. Así, $f''(x) = (x + 1)e^x$. Como $e^x > 0$, la función es cóncava en $(-\infty, -1)$ y convexa en $(-1, +\infty)$. El signo de f'' cambia en -1 , donde

$$f(-1) = 1 + \int_0^{-1} te^t dt = 1 + [(t - 1)e^t]_0^{-1} = 2 - \frac{2}{e}.$$

El punto de inflexión es $(-1, 2 - 2/e)$.

Ejercicio 4

Descomponemos

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1 + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}.$$

Una primitiva es $F(x) = x + \ln|x - 1| - \ln|x + 1| + C$. La condición $F(2) = 4$ determina $C = 2 + \ln 3$. La primitiva pedida es

$$F(x) = x + \ln|x - 1| - \ln|x + 1| + 2 + \ln 3.$$

Ejercicio 5

El enunciado pide comprobar $A^2 = -A^{-1}$. Como $\det A = -1 \neq 0$, existe la inversa; al multiplicar la igualdad por A se comprueba equivalentemente que $A^3 = -I$. El cálculo da

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = -I,$$

por lo que $A^2 = -A^{-1}$. También $A^4 = -A$. La ecuación $A^4 X + B = AC$ se convierte en $-AX + B = AC$, es decir, $AX = B - AC$. Luego $X = A^{-1}B - C = -A^2B - C$, y

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -9 & -5 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6

Sean a, b, c los viajes por las rutas A, B y C. Las condiciones dan $a+b+c = 70$ y $b = a+c$. Por tanto, $2(a+c) = 70$, es decir, $a+c = 35$ y $b = 35$. Esto no determina por separado a y c : hay infinitas parejas no negativas con suma 35.

En el segundo caso, $2c = b - 5 = a + c - 5$. Junto con $a + c = 35$, se obtiene $c = a - 5$, de donde $a = 20$, $c = 15$ y $b = 35$. La empresa hace $\boxed{20, 35, 15}$ viajes en A, B y C.

Ejercicio 7

El vector perpendicular desde A al plano es $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -1/2, 1/2)$, proporcional a $(0, -1, 1)$. Este es un vector normal de π . Al usar el punto $B = (1, 1/2, 1/2)$ resulta $y - z = 0$, así que

$$\pi : y - z = 0.$$

La distancia de A al plano es $|1 - 0|/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$. El punto simétrico está al doble de esa distancia; por tanto, la distancia entre A y su simétrico es $\boxed{\sqrt{2}}$.

Ejercicio 8

La recta r tiene punto $(3, 1, -3)$ y director $(1, 0, -1)$. En s , tomando $x = 0$ se obtiene $(0, 1, 0)$; su director es $(1, -1, 0)$. El punto de r para $\lambda = -3$ es $(0, 1, 0)$, que satisface las ecuaciones de s . Las rectas se cortan allí y sus directores no son paralelos.

Una recta perpendicular a ambas por el punto de corte tiene como director el producto vectorial $(1, 0, -1) \times (1, -1, 0) = (1, 1, 1)$. Por tanto,

$$(x, y, z) = (0, 1, 0) + t(1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$