

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan las dos para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

La función racional está definida cuando su denominador no se anula, por lo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Dividiendo el numerador entre el denominador obtenemos

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 2}{x - 1} = -3x - 3 - \frac{1}{x - 1}.$$

a) En $x = 1$, los límites laterales son infinitos de signo contrario:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty,$$

así que $x = 1$ es una asíntota vertical. La descomposición también muestra que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (-3x - 3)) = 0,$$

por lo que la asíntota oblicua es $y = -3x - 3$. Además, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, así que no existe asíntota horizontal.

b) El signo de la derivada determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Derivamos y resolvemos $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = -3 + \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \iff x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Junto con el punto $x = 1$, excluido del dominio, estos valores separan la recta en intervalos. La derivada es positiva cuando $|x - 1| < 1/\sqrt{3}$ y negativa fuera de ese intervalo. Por tanto,

Intervalo	$(-\infty, 1 - 1/\sqrt{3})$	$(1 - 1/\sqrt{3}, 1)$	$(1, 1 + 1/\sqrt{3})$	$(1 + 1/\sqrt{3}, +\infty)$
Signo de f'	-	+	+	-
Comportamiento	decreciente	creciente	creciente	decreciente

Opción A - Ejercicio 2

Para integrar $(x + 2) \ln x$ usamos integración por partes en cada término, pues conocemos una primitiva de $\ln x$ y de $x \ln x$:

$$\begin{aligned} \int (x + 2) \ln x \, dx &= \int x \ln x \, dx + 2 \int \ln x \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + 2x \ln x - 2x + C \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} - 2x + C. \end{aligned}$$

La primitiva que pasa por $(1, 0)$ debe cumplir $F(1) = 0$. Como $\ln 1 = 0$,

$$0 = -\frac{1}{4} - 2 + C \implies C = \frac{9}{4}.$$

Por tanto,

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} - 2x + \frac{9}{4}, \quad x > 0.$$

Opción A - Ejercicio 3

a) El producto de una matriz columna por una fila da una matriz de orden 3:

$$BM = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = A.$$

b) Como $A = BM$, el sistema $AX = B$ se puede escribir $B(MX) = B$. Dado que $B \neq \vec{0}$, esta igualdad equivale a la ecuación escalar $MX = 1$. También se ve que $\text{rg}(A) = 1$ y que añadir B no aumenta el rango: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A | B) = 1 < 3$. Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

c) La ecuación independiente es

$$-x + y + 2z = 1.$$

Tomando $y = s$ y $z = t$ como parámetros, despejamos $x = s + 2t - 1$. Por tanto,

$$(x, y, z) = (s + 2t - 1, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Convertimos r a forma paramétrica. Si $x = t$, sus ecuaciones implican $y = t + 1$ y $z = t + 1$; así, un punto es $R_0 = (0, 1, 1)$ y un vector director es $\vec{u} = (1, 1, 1)$. La recta s tiene punto $S_0 = (1, 0, 2)$ y vector director $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

a) Un vector perpendicular a ambas rectas se obtiene con $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, -1, 2)$. Buscamos los pies $P \in r$ y $Q \in s$ de la perpendicular común. Escribimos

$$P = (\alpha, \alpha + 1, \alpha + 1), \quad Q = (1 - \beta, \beta, 2).$$

La condición $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$ da $1 - 3\alpha = 0$, luego $\alpha = 1/3$. La condición $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$ da $2\beta - 2 = 0$, luego $\beta = 1$. Por ello, $P = (1/3, 4/3, 4/3)$ y la perpendicular común, en forma paramétrica, es

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} - t, \\ y = \frac{4}{3} - t, \\ z = \frac{4}{3} + 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) La distancia entre dos rectas cruzadas es la longitud de su perpendicular común. También podemos calcularla con

$$d(r, s) = \frac{|(S_0 - R_0) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

Sustituyendo $S_0 - R_0 = (1, -1, 1)$ y $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, -1, 2)$,

$$d(r, s) = \frac{|(1, -1, 1) \cdot (-1, -1, 2)|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Sea x la longitud de cuerda destinada al cuadrado; entonces $1 - x$ metros se destinan a la circunferencia, con $0 \leq x \leq 1$. El lado del cuadrado es $x/4$, mientras que el radio de la circunferencia es $(1 - x)/(2\pi)$. La suma de las áreas que queremos minimizar queda expresada en una sola variable:

$$S(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(1-x)^2}{4\pi}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Derivamos y buscamos los puntos críticos del intervalo:

$$S'(x) = \frac{x}{8} - \frac{1-x}{2\pi} = 0 \iff \pi x = 4(1-x) \implies x = \frac{4}{\pi+4}.$$

Este valor pertenece al intervalo permitido y $S''(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0$, así que da un mínimo. La otra longitud es

$$1 - x = \frac{\pi}{\pi+4}.$$

Por tanto, sí es posible. Las longitudes que minimizan la suma de áreas son

$$\ell_{\text{cuadrado}} = \frac{4}{\pi+4} \text{ m}, \quad \ell_{\text{circunferencia}} = \frac{\pi}{\pi+4} \text{ m}.$$

Opción B - Ejercicio 2

a) En el dominio $x > -1$, usamos el cambio sugerido $t = 1 + x^3$, cuya derivada es $dt = 3x^2 dx$. Entonces,

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^{3/2}} dx = \frac{1}{3} \int t^{-3/2} dt = -\frac{2}{3\sqrt{t}} + C = \boxed{-\frac{2}{3\sqrt{1+x^3}} + C}.$$

b) Sea $F(x) = -\frac{2}{3\sqrt{1+x^3}} + C$. La condición $F(2) = 0$ determina la constante:

$$0 = -\frac{2}{3\sqrt{9}} + C = -\frac{2}{9} + C \implies C = \frac{2}{9}.$$

Así, la primitiva pedida es $\boxed{F(x) = \frac{2}{9} - \frac{2}{3\sqrt{1+x^3}}}$.

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & k & 0 \\ 2 & -1 & k \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A_k | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & k & 0 & 1 \\ 2 & -1 & k & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Como el sistema es compatible indeterminado para algún k , necesariamente $\det A_k = 0$. Calculamos

$$\det A_k = k^2 + 5k - 6 = (k - 1)(k + 6),$$

de modo que solo hay que comprobar $k = 1$ y $k = -6$.

Si $k = 1$, las filas cumplen $F_1 - 2F_2 + F_3 = 0$, y la misma combinación de los términos independientes es $1 - 2 + 1 = 0$. Dos filas son independientes, por lo que $\text{rg}(A_1) = \text{rg}(A_1 | b) = 2 < 3$ y el sistema es SCI.

Si $k = -6$, se cumple $-5F_1 + 3F_2 + 9F_3 = 0$ en la matriz de coeficientes, pero la misma combinación en la columna ampliada da $-5 + 3 + 9 = 7 \neq 0$. Así, los rangos son distintos y el sistema es incompatible. Por tanto, el valor compatible indeterminado es $\boxed{k = 1}$.

Para $k = 1$, resolvemos el sistema usando las dos primeras ecuaciones:

$$3x + y = 1, \quad 2x - y + z = 1.$$

Tomando $x = t$, se obtiene $y = 1 - 3t$ y, al sustituir en la segunda ecuación, $z = 2 - 5t$. La tercera ecuación queda satisfecha por la relación entre filas. Luego,

$$(x, y, z) = (t, 1 - 3t, 2 - 5t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 4

El plano respecto del cual B es el simétrico de A es el plano mediador del segmento AB : pasa por su punto medio y es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$. Calculamos

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3 - 1, -1 - 3, -1 + 1) = (2, -4, 0), \quad M = \frac{A + B}{2} = (2, 1, -1).$$

Usando $\overrightarrow{AB}$ como vector normal y el punto M ,

$$2(x - 2) - 4(y - 1) = 0 \implies \boxed{x - 2y = 0}.$$

Para el área del triángulo, tomamos la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados que parten de A :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= C - A = (5 - 1, 1 - 3, 5 + 1) = (4, -2, 6), \\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (-24, -12, 12), \quad \text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \boxed{6\sqrt{6}}. \end{aligned}$$