

Septiembre de 2020 · Convocatoria extraordinaria · Versión 2

El examen propone seis problemas y pide elegir tres. Para que puedas practicar cualquiera de ellos, resolvemos los seis paso a paso.

Problema 1 · Sistema con parámetro

El sistema es

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 3, \\ x - 3y + az = -2, \\ x + y + 2z = a. \end{cases}$$

Para aplicar Rouché–Frobenius escribimos la matriz de coeficientes y la ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -3 & a & -2 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{array} \right).$$

a) Valores de a para los que el sistema es compatible. Si $\det A \neq 0$, entonces $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3$, así que hay una única solución. Calculamos el determinante:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \begin{vmatrix} -3 & a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-6 - a) - a(2 - a) + 8 \\ &= a^2 - 3a + 2 = (a - 1)(a - 2). \end{aligned}$$

Por tanto, si $a \neq 1, 2$, el sistema es compatible determinado (SCD).

Estudiamos por separado los valores que anulan el determinante:

- **Si $a = 1$:** las filas 1 y 3 de A coinciden. Las filas 1 y 2 son independientes porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

así que $\operatorname{rg}(A) = 2$. En la ampliada, el menor de las columnas x, y y la columna de términos independientes vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Luego $\operatorname{rg}(A^*) = 3$. Como los rangos son distintos, el sistema es incompatible (SI).

- **Si $a = 2$:** al restar la tercera fila a las dos primeras, en la matriz ampliada aparecen

$$F_1 - F_3 = (0, 1, 0 \mid 1), \quad F_2 - F_3 = (0, -4, 0 \mid -4) = -4(F_1 - F_3).$$

Las dos filas independientes se comprueban, por ejemplo, con el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Por tanto, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 2 < 3$: el sistema es compatible indeterminado (SCI).

b) Solución cuando $a = 0$. Sustituimos $a = 0$:

$$x + 2z = 3, \quad x - 3y = -2, \quad x + y + 2z = 0.$$

Restamos la tercera ecuación de la primera: $-y = 3$, así que $y = -3$. En la segunda, $x - 3(-3) = -2$, de donde $x = -11$. Finalmente, en la primera, $-11 + 2z = 3$, así que $z = 7$. La solución es

$$(x, y, z) = (-11, -3, 7).$$

c) Soluciones cuando el sistema es compatible indeterminado

Ya hemos visto que esto ocurre para $a = 2$. Restando la tercera ecuación de la primera obtenemos $y = 1$. Al sustituir en la tercera,

$$x + 1 + 2z = 2 \implies x + 2z = 1.$$

Tomamos $z = t$ como parámetro libre; entonces $x = 1 - 2t$. Todas las soluciones son

$$(x, y, z) = (1 - 2t, 1, t), t \in \mathbb{R}.$$

Problema 2 · Rectas paralelas a dos planos

Escribimos los planos en forma general y sus vectores normales:

$$p: x + y - 1 = 0, n_p = (1, 1, 0); \pi': x - y + z - 1 = 0, n_{\pi'} = (1, -1, 1).$$

El punto es $P = (1, -1, 0)$.

a) Recta por P paralela a los dos planos. La dirección de una recta paralela a un plano debe ser perpendicular al normal de ese plano. Por eso buscamos un vector perpendicular a ambos normales; el producto vectorial sirve para ello:

$$n_p \times n_{\pi'} = (1, -1, -2) = v.$$

La recta que pasa por P con esa dirección, escrita en forma paramétrica, es

$$r: x = 1 + t, y = -1 - t, z = -2t, t \in \mathbb{R}.$$

b) Distancia de r a cada plano. Como r es paralela a ambos planos, la distancia entre la recta y cada plano es la distancia de cualquier punto de r , en particular P , a ese plano. Para $Ax + By + Cz + D = 0$, usamos

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Así,

$$d(r, p) = d(P, p) = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

y

$$d(r, \pi') = d(P, \pi') = \frac{|1 - (-1) + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

c) Recta por P perpendicular a la intersección de los planos. Llamamos L a la intersección de p y π' . Resolvemos las ecuaciones de los planos: de $x + y = 1$, $y = 1 - x$, y al sustituir en $x - y + z = 1$, $z = 2 - 2x$. Una forma paramétrica de L es

$$L: x = 1 - s, y = s, z = 2s, s \in \mathbb{R},$$

con vector director $w = (-1, 1, 2)$.

Buscamos el pie H de la perpendicular desde P a L . Un punto genérico de L es $H(s) = (1 - s, s, 2s)$; el vector desde P hasta ese punto debe ser perpendicular a w :

$$\begin{aligned} (H(s) - P) \cdot w &= (-s, s + 1, 2s) \cdot (-1, 1, 2) \\ &= s + (s + 1) + 4s = 6s + 1 = 0. \end{aligned}$$

De aquí $s = -1/6$, y

$$H = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right), H - P = \frac{1}{6}(1, 5, -2).$$

Comprobamos la perpendicularidad: $(1, 5, -2) \cdot (-1, 1, 2) = -1 + 5 - 4 = 0$. La recta pedida, en forma paramétrica, es

$$q: x = 1 + u, y = -1 + 5u, z = -2u, u \in \mathbb{R}.$$

Problema 3 · Dominio, asíntotas, monotonía e integral

La función es

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

a) Dominio y asíntotas. La raíz está en el denominador, así que necesitamos que su radicando sea estrictamente positivo:

$$\begin{aligned}x^2 - 1 > 0 &\iff (x - 1)(x + 1) > 0 \\&\iff x < -1 \text{ o } x > 1 \implies D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).\end{aligned}$$

Comprobamos las asíntotas verticales desde los lados que pertenecen al dominio:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty.$$

Luego hay asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 1$.

Para estudiar los extremos, dividimos numerador y denominador por $|x|$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

Las asíntotas horizontales son $y = 1$ a la derecha y $y = -1$ a la izquierda. Como en ambos extremos existe una asíntota horizontal, no hay asíntota oblicua.

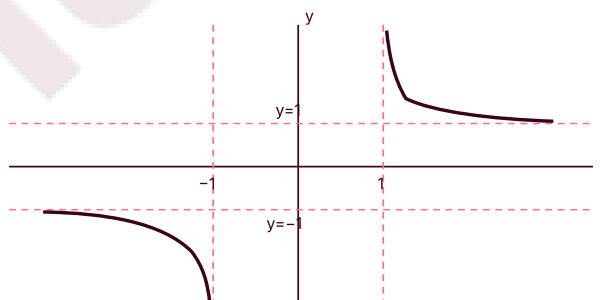
b) Crecimiento, decrecimiento y gráfica. Derivamos con la regla del producto:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^2 - 1)^{-1/2} - x^2(x^2 - 1)^{-3/2} \\&= \frac{x^2 - 1 - x^2}{(x^2 - 1)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 - 1)^{3/2}}.\end{aligned}$$

En todo el dominio, $(x^2 - 1)^{3/2} > 0$, por lo que $f'(x) < 0$. Lo comprobamos con un valor de prueba en cada intervalo:

Intervalo del dominio	Valor de prueba	$f'(x)$ en el valor de prueba	Signo	Comportamiento
$(-\infty, -1)$	-2	$-1/(3\sqrt{3})$	-	Decrece
$(1, \infty)$	2	$-1/(3\sqrt{3})$	-	Decrece

No hay puntos críticos porque el numerador de la derivada nunca se anula. La función tiene dos ramas: la izquierda baja desde la asíntota horizontal $y = -1$ hacia $-\infty$ al acercarse a $x = -1$; la derecha baja desde $+\infty$ junto a $x = 1$ y se aproxima a $y = 1$. No corta los ejes: $x = 0$ no pertenece al dominio y el numerador solo sería cero en ese punto. Esbozo propio (las líneas discontinuas representan las asíntotas):



c) Valor de $\int_2^3 f(x) dx$. Como $x > 1$, usamos $u = x^2 - 1$, de modo que $du = 2x dx$. También se puede reconocer directamente que la derivada de $\sqrt{x^2 - 1}$ es $x/\sqrt{x^2 - 1}$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx &= \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{2} (2\sqrt{u}) + C \\&= \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 - 1} + C.\end{aligned}$$

Evaluamos entre 2 y 3, indicando los extremos en el corchete:

$$\int_2^3 f(x) dx = \left[\sqrt{x^2 - 1} \right]_2^3 = \sqrt{8} - \sqrt{3} = \boxed{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}.$$

Problema 4 · Inversa y sistema matricial

La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Justificar que existe A^{-1} y calcularla. Una matriz cuadrada es invertible si su determinante no es cero. Expandimos por la primera columna:

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - 0) = 1 \neq 0.$$

Así que existe la inversa. Calculamos las potencias necesarias, mostrando los productos:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

El enunciado permite usar

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I = O.$$

Multiplicamos por A^{-1} , que sabemos que existe:

$$A^2 - 3A + 3I - A^{-1} = O \implies A^{-1} = A^2 - 3A + 3I.$$

Sustituyendo las matrices,

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I = \begin{pmatrix} 1-3+3 & 4-6 & 0 \\ 0 & 1-3+3 & 0 \\ 0 & 4-6 & 1-3+3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

b) Hallar a, b si $A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Escribimos el lado derecho con sus entradas:

$$A^2 + aA + bI = \begin{pmatrix} 1+a+b & 4+2a & 0 \\ 0 & 1+a+b & 0 \\ 0 & 4+2a & 1+a+b \end{pmatrix}.$$

Lo igualamos a la inversa obtenida. La entrada de la primera fila y segunda columna da $4 + 2a = -2$, así que $a = -3$. La entrada diagonal da $1 + a + b = 1$, de donde $b = 3$. Por tanto,

$$\boxed{a = -3, b = 3}.$$

c) Valor de λ para que $(A - \lambda I)X = O$ tenga infinitas soluciones. El sistema homogéneo tiene soluciones no nulas, y por tanto infinitas, cuando el determinante de su matriz es cero:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}, \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^3.$$

Luego $\lambda = 1$. Sustituimos este valor:

$$(A - I)X = O \implies \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La única condición es $2y = 0$, es decir, $y = 0$; x y z quedan libres. Todas las soluciones son

$$\boxed{(x, y, z) = (s, 0, t), s, t \in \mathbb{R}}.$$

Problema 5 · Posiciones relativas y ángulo entre rectas

Las rectas, ambas en forma paramétrica, son

$$r: x = 1, y = 2 + \lambda, z = 2\lambda, s: x = -1 + 2\mu, y = -\mu, z = -2 + \mu.$$

El plano en forma general es

$$\pi: 3x + ay - z + 1 = 0.$$

Los datos de las rectas son

$$R = (1, 2, 0), u = (0, 1, 2); S = (-1, 0, -2), v = (2, -1, 1).$$

a) ¿Puede estar r contenida en π para algún a ? Para que toda la recta esté en el plano, la sustitución de sus coordenadas debe dar cero para cualquier λ :

$$\begin{aligned} 3(1) + a(2 + \lambda) - 2\lambda + 1 &= 0, \\ (4 + 2a) + (a - 2)\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Una expresión lineal en λ es cero para todo λ solo si el término constante y el coeficiente de λ son ambos cero. Eso exigiría

$$4 + 2a = 0 \text{ y } a - 2 = 0,$$

es decir, a la vez $a = -2$ y $a = 2$, lo cual es imposible. Por tanto,

$$\boxed{\text{no existe ningún valor de } a \text{ para el que } r \subset \pi.}$$

b) Distancia entre r y s . Primero comprobamos la posición relativa. Los directores no son proporcionales, y

$$\begin{aligned} u \times v &= (3, 4, -2), S - R = (-2, -2, -2), \\ (S - R) \cdot (u \times v) &= -6 - 8 + 4 = -10 \neq 0. \end{aligned}$$

Así, las rectas no son coplanarias: son rectas que se cruzan. Para dos rectas cruzadas, la distancia es

$$d(r, s) = \frac{|(S - R) \cdot (u \times v)|}{|u \times v|}.$$

Como $|u \times v| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$,

$$\boxed{d(r, s) = \frac{10}{\sqrt{29}}}.$$

c) Coseno del ángulo entre r y la recta t . La recta del enunciado viene como intersección de los planos $2x - y = 0$ y $y - z = 2$. La escribimos en forma paramétrica: tomando $x = q$, resulta $y = 2q$ y $z = 2q - 2$. Por tanto,

$$t: x = q, y = 2q, z = 2q - 2, v_t = (1, 2, 2).$$

El coseno del ángulo menor entre dos rectas se calcula con

$$\cos \theta = \frac{|u \cdot v_t|}{|u| |v_t|}.$$

Sustituimos $u = (0, 1, 2)$ y $v_t = (1, 2, 2)$:

$$u \cdot v_t = 6, |u| = \sqrt{5}, |v_t| = 3,$$

de modo que

$$\boxed{\cos \theta = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

Problema 6 · Área máxima de un rectángulo inscrito

El triángulo tiene vértices $A = (0, 12)$, $B = (-5, 0)$ y $C = (5, 0)$. El rectángulo tiene vértices inferiores $(-x, 0)$ y $(x, 0)$, con $0 \leq x \leq 5$. Por simetría, sus dos vértices superiores están a la misma altura.

a) Expresión del área. La recta que contiene el lado AC pasa por $(0, 12)$ y $(5, 0)$, así que su pendiente es $-12/5$ y su ecuación es

$$y = 12 - \frac{12}{5}x.$$

La altura del rectángulo es el valor de esa recta en la abscisa x ; su base mide $x - (-x) = 2x$. Por ello,

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{base} \times \text{altura} \\ &= 2x \left(12 - \frac{12}{5}x \right) \\ &= \boxed{24x - \frac{24}{5}x^2}, \quad 0 \leq x \leq 5. \end{aligned}$$

b) Valor de x que maximiza el área y dimensiones del rectángulo. Derivamos y buscamos los puntos críticos del intervalo:

$$f'(x) = 24 - \frac{48}{5}x, \quad f'(x) = 0 \implies x = \frac{5}{2}.$$

Comprobamos el signo de la derivada a ambos lados del punto crítico:

Intervalo	Valor de prueba	Sustitución en $f'(x)$	Signo	Comportamiento
$(0, 5/2)$	1	$24 - 48/5 = 72/5$	+	Crece
$x = 5/2$	—	$f'(5/2) = 0$	0	Máximo
$(5/2, 5)$	4	$24 - 192/5 = -72/5$	-	Decrece

La función es continua en $[0, 5]$; además, $f(0) = f(5) = 0$. Como crece hasta $5/2$ y luego decrece, allí está el máximo absoluto. La base y la altura son

$$\text{base} = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5, \quad \text{altura} = 12 - \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{2} = 6.$$

El área máxima es

$$\boxed{f\left(\frac{5}{2}\right) = 5 \cdot 6 = 30 \text{ unidades cuadradas.}}$$

c) Proporción entre las áreas. El área del triángulo es

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60.$$

Usando el rectángulo de área máxima, la proporción es

$$\boxed{\frac{A_{\text{rectángulo}}}{A_{\Delta}} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}.$$