

OPCIÓN A**Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas****Problema 1.** Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación $XA B - X C = 2 C$.*Solución:**La ecuación a resolver es: $XA B - X C = 2 C$* *Por la propiedad distributiva del producto respecto de la resta de matrices:*

$$X(A B - C) = 2 C \quad (a)$$

Llamamos $M = A B - C$ *Obtenemos la matriz M ,*

$$\begin{aligned} M = AB - C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Obtenemos la inversa de la matriz M , M^{-1}

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 8 = 8 \neq 0 \rightarrow \exists M^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Y, } M^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{4}{8} & \frac{4}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De lo obtenido en (a): $XM = 2 C$, multiplicando por M^{-1} por la derecha: $XM M^{-1} = 2 C M^{-1}$, operando: *$XI = 2 C M^{-1}$, por lo tanto: $X = 2 C M^{-1}$* *Calculemos la matriz X ,*

$$\begin{aligned} X = 2CM^{-1} &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) & 0 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ -1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) & -1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} - 1 & \frac{1}{4} + 1 \end{pmatrix} = \\ &= 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Una cadena de montaje está especializada en la producción de cierto modelo de motocicleta. Los costes de producción en euros, $C(x)$, están relacionados con el número de motocicletas fabricadas, x , mediante la siguiente expresión:

$$C(x) = 10x^2 + 2000x + 250000$$

Si el precio de venta de cada motocicleta es 8000 euros y se venden todas las motocicletas fabricadas, se pide:

- Definir la función de ingresos que obtiene la cadena de montaje en función de las ventas de las motocicletas producidas.
- ¿Cuál es la función que expresa los beneficios de la cadena de montaje?
- ¿Cuántas motocicletas debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán estos beneficios?

Solución:

a) La función, $I(x)$, que nos da los ingresos en función de las ventas de las motocicletas producidas la obtenemos considerando que se fabrican y se venden x motocicletas, cada una a 8000€,

$I(x) = 8000x$, siendo $x = \text{número de motocicletas fabricadas } (x \in \mathbb{N})$.

b) La función que expresa los beneficios de la cadena de montaje, $B(x)$, la obtenemos restando a los ingresos los costes de producción, $C(x)$, es decir:

$$\begin{aligned} B(x) &= I(x) - C(x) = 8000x - (10x^2 + 2000x + 250000) = 8000x - 10x^2 - 2000x - 250000 = \\ &= -10x^2 + 6000x - 250000 \end{aligned}$$

Solución: $B(x) = -10x^2 + 6000x - 250000$

c) Busquemos el máximo de $B(x)$. Hay que considerar que $x \in \mathbb{N}$.

$$B'(x) = -20x + 6000$$

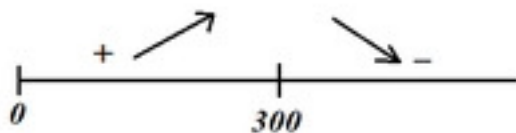
$$-20x + 6000 = 0, \quad -20x = -6000, \quad x = \frac{-6000}{-20} = 300$$

Estudiamos el signo de $B'(x)$ a la izquierda y derecha de 300,

$$x = 100, \quad B'(100) = -20 \cdot 100 + 6000 = -2000 + 6000 = 4000 > 0$$

$$x = 400, \quad B'(400) = -20 \cdot 400 + 6000 = -8000 + 6000 = -2000 < 0$$

Por lo tanto:



Como a la izquierda de 300 $B(x)$ es creciente y a la derecha decreciente, en $x = 300$ $B(x)$ alcanza su máximo absoluto.

$$\text{Para } x = 300, \quad B(300) = -10 \cdot 300^2 + 6000 \cdot 300 - 250000 = 650000$$

Solución: **maximizará beneficios cuando fabrique 300 motocicletas y, en este caso, los beneficios ascenderán a 650000€.**

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Una empresa de telefonía móvil ofrece 3 tipos diferentes de tarifas, A, B y C, cifrándose en un 45%, 30% y 25% el porcentaje de clientes abonados a cada una de ellas, respectivamente. Se ha detectado que el 3%, 5% y 1% de los abonados a la tarifa A, B y C, respectivamente, cancelan su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia. Se pide:

- Si un cliente elegido al azar cancela su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia, ¿cuál es la probabilidad de que estuviera abonado a la tarifa C?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente elegido al azar no cancele su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?
- Si se selecciona un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté abonado a la tarifa A y decida cancelar su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?
- Si se selecciona un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no esté abonado a la tarifa B y decida cancelar su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?

Solución:

Considerando los sucesos:

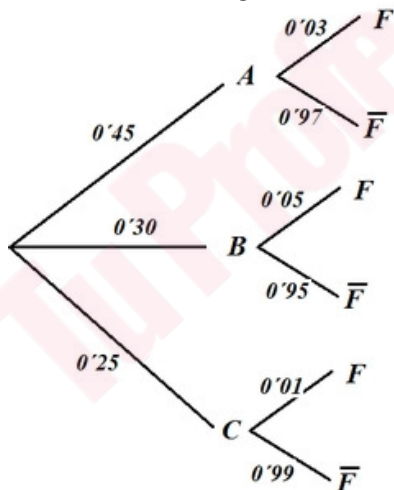
A = estar abonado a la tarifa A

B = estar abonado a la tarifa B

C = estar abonado a la tarifa C

F = cancelar el contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia

El problema podemos resumirlo en el siguiente árbol,



a) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad:

$$P\left(\frac{C}{F}\right) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{0.25 \cdot 0.01}{0.45 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.05 + 0.25 \cdot 0.01} = \frac{0.0025}{0.031} = 0.0806451... \approx 0.0806$$

b) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad:

$$P(\overline{F}) = 1 - P(F) = \{ P(F) \text{ calculada en el apartado a) } \} = 1 - 0.031 = 0.969$$

c) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad:

$$P(A \cap F) = 0.45 \cdot 0.03 = 0.0135$$

d) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad:

$$P(\overline{B} \cap F)$$

Los sucesos A , B y C cumplen que $A \cup B \cup C = E$ (suceso seguro) y son disjuntos dos a dos (por definición, una persona sólo puede estar abonada a una tarifa), por lo tanto $\overline{B} = A \cup C$, en consecuencia:

$$P(\overline{B} \cap F) = P(A \cap F) + P(C \cap F)$$

En el apartado anterior calculamos $P(A \cap F) = 0'0135$

Calculemos $P(C \cap F) = 0'25 \cdot 0'01 = 0'0025$

Finalmente, $P(\overline{B} \cap F) = P(A \cap F) + P(C \cap F) = 0'0135 + 0'0025 = \mathbf{0'016}$

Tu Profe al Rescate

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Un estudiante reparte propaganda publicitaria para conseguir ingresos. Le pagan 8 cts. de euro por cada impreso colocado en el parabrisas de un coche y 12 cts. por cada uno depositado en un buzón. Ha calculado que cada día puede repartir como máximo 150 impresos y la empresa le exige diariamente que la diferencia entre los colocados en coche y el doble de los colocados en buzones no sea inferior a 30 unidades. Además, tiene que introducir en buzones al menos 15 impresos diariamente. ¿Cuántos impresos debe colocar en coches y buzones para maximizar sus ingresos diarios? ¿Cuál es este ingreso máximo?

Solución:

Utilizamos las siguientes incógnitas

x = número de impresos a colocar diariamente en parabrisas de coches

y = número de impresos a colocar diariamente en buzones

Del enunciado deducimos:

“Le pagan 8 cts de euro por impreso en el parabrisas y 12 cts por impreso en buzón”;

$$\text{ingresos diarios} = 0'08x + 0'12y$$

“cada día puede repartir como máximo 150 impresos”; $x + y \leq 150$

“la empresa le exige diariamente que la diferencia entre los colocados en coche y el doble de los colocados en buzones no sea inferior a 30 unidades”; $x - 2y \geq 30$

“tiene que introducir en buzones al menos 15 impresos diariamente”; $y \geq 15$

Como x e y representan número de impresos, la restricción para los valores de estas variables es $x, y \in \mathbb{N}$

$$\text{Maximizar } z = 0'08x + 0'12y$$

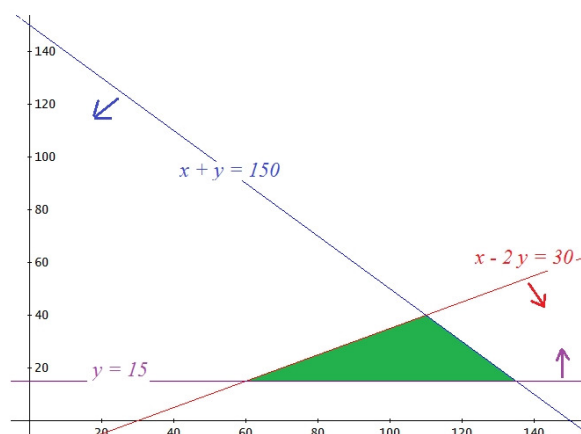
El problema a resolver es:

$$\text{s.a. } \begin{cases} x + y \leq 150 \\ x - 2y \geq 30 \\ y \geq 15 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x + y \leq 150$	(b) $x - 2y \geq 30$	(c) $y \geq 15$																		
$x + y = 150$	$x - 2y = 30$	$y = 15$																		
<table> <tr> <td>x</td> <td>y</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>150</td> </tr> <tr> <td>150</td> <td>0</td> </tr> </table>	x	y	0	150	150	0	<table> <tr> <td>x</td> <td>y</td> </tr> <tr> <td>60</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>30</td> <td>0</td> </tr> </table>	x	y	60	15	30	0	<table> <tr> <td>x</td> <td>y</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>15</td> </tr> </table>	x	y	0	15	10	15
x	y																			
0	150																			
150	0																			
x	y																			
60	15																			
30	0																			
x	y																			
0	15																			
10	15																			
$\zeta(0,0)$ cumple?	$\zeta(0,0)$ cumple?	$\zeta(0,0)$ cumple?																		
$0 + 0 \leq 150$ Sí	$0 - 2 \cdot 0 \geq 30$ No	$0 \geq 15$ No																		

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

De (a) y (b): $B(110, 40)$

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ x - 2y = 30 \end{cases}$$

restando ambas ecuaciones: $3y = 120$; $y = 40$

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $x + 40 = 150$; $x = 110$

De (a) y (c): $C(135, 15)$

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ y = 15 \end{cases}$$

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $x + 15 = 150$; $x = 135$

De (b) y (c): $A(60, 15)$

$$\begin{cases} x - 2y = 30 \\ y = 15 \end{cases}$$

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $x - 2 \cdot 15 = 30$; $x - 30 = 30$; $x = 60$

Los vértices de la región factible son: $A(60, 15)$, $B(110, 40)$ y $C(135, 15)$.

Calculemos los valores de la función en los vértices,

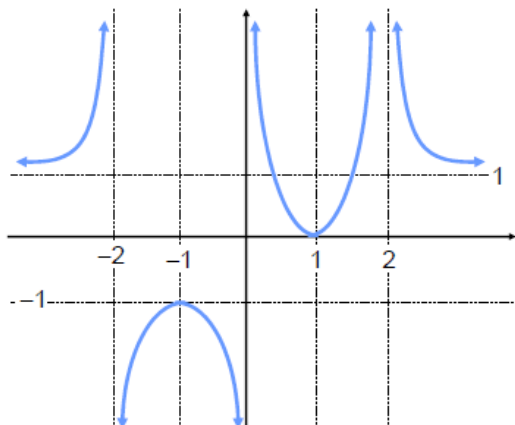
x, y	$z = 0'08x + 0'12y$
$60, 15$	$0'08 \cdot 60 + 0'12 \cdot 15 = 6'6$
$110, 40$	$0'08 \cdot 110 + 0'12 \cdot 40 = 13'6$ Máximo
$135, 15$	$0'08 \cdot 135 + 0'12 \cdot 15 = 12'6$

Solución: Debe colocar **110 impresos en los coches y 40 en buzones**. De esta forma conseguirá unos ingresos diarios de **13'60€**.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. La gráfica de la función $f(x)$ es la siguiente:



Se pide:

- Su dominio y puntos de intersección con los ejes coordenados.
- Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
- Valores de x para los que la función derivada de $f(x)$ es positiva, negativa o nula, respectivamente.
- El valor de los siguientes límites: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- Calcular $\int_0^1 (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4) dx$.

Solución:

a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$, ya que para $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$ la función no está definida.

El punto de intersección con eje OX es $(1, 0)$

No hay punto de intersección con el eje OY

b) En la representación gráfica se observa que la función $f(x)$ tiene dos asíntotas verticales y una horizontal.

Las ecuaciones de las asíntotas verticales son: $x = -2$ y $x = 2$

La ecuación de la asíntota horizontal es $y = 1$

c) $f'(x)$ es positiva cuando $f(x)$ es creciente, por lo tanto, $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, 2)$

$f'(x)$ es negativa cuando $f(x)$ es decreciente, por lo tanto, $f'(x) < 0$ en $(-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$

$f'(x) = 0$ en los puntos en que la recta tangente a $f(x)$ es horizontal, por lo tanto, $f'(x) = 0$ para $x = -1$ y $x = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ya que a medida que crece el valor de x la función se acerca a 1.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ya que dando a x valores positivos y cada vez más cercanos a 0, el valor de la función aumenta indefinidamente.

e)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4) dx &= \left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 4x \right]_0^1 = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - x^3 - 2x^2 + 4x \right]_0^1 = \\ &= \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^4}{2} - 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \right) - \left(\frac{0^5}{5} + \frac{0^4}{2} - 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - 1 - 2 + 4 - 0 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{2+5+10}{10} = \\ &= \frac{17}{10} = 1.7\end{aligned}$$

Solución: $\int_0^1 (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4) dx = 1.7$

Tu Profe al Rescate

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. El 50% de los jóvenes de cierta población afirma practicar el deporte A y el 40% afirma practicar el deporte B. Además, se sabe que el 70% de los jóvenes de dicha población practica el deporte A o el B. Si seleccionamos un joven al azar, se pide:

- La probabilidad de que no practique ninguno de los deportes.
- La probabilidad de que practique el deporte A y no practique el B.
- Si practica el deporte B, ¿cuál es la probabilidad de que practique el deporte A?
- ¿Son independientes los sucesos “Practicar el deporte A” y “Practicar el deporte B”?
¿Por qué?

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

A = practicar el deporte A

B = practicar el deporte B

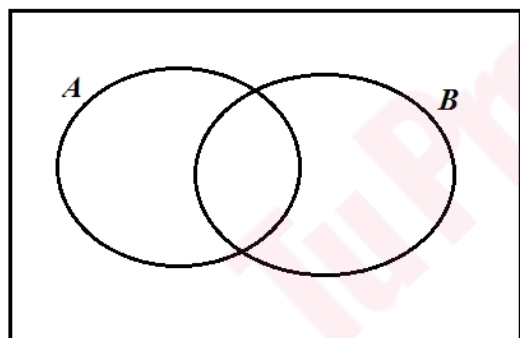
De los datos del problema sabemos que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.7$

a) *Probabilidad de que no practique ninguno de los deportes, hay que calcular $P(\overline{A \cup B})$*

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = 0.3$$

b) *Probabilidad de que practique el deporte A y no practique el deporte B, hay que calcular $P(A \cap \overline{B})$*

El problema podemos representarlo mediante el siguiente diagrama de Venn



Hay que calcular las probabilidades de cada parte de diagrama.

Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

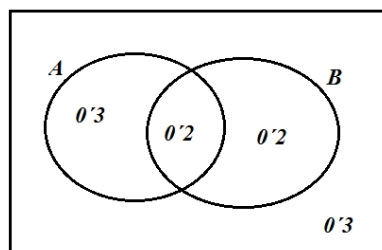
Sustituyendo los valores conocidos:

$$0.7 = 0.5 + 0.4 - P(A \cap B)$$

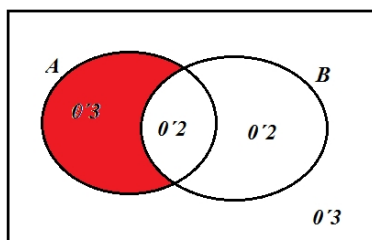
$$0.7 = 0.9 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0.9 - 0.7 = 0.2$$

El diagrama completado:



Y $A \cap \overline{B}$ es:



Por lo que $P(A \cap \overline{B}) = 0.3$

c) Si practica el deporte B , ¿cuál es la probabilidad de que practique el deporte A ?, hay que calcular $P(A/B)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

d) A y B serán independientes si $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

Del apartado b) sabemos que $P(A \cap B) = 0.2$

$$P(A) P(B) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$$

Por lo tanto los sucesos A y B son independientes.

Tu Profe al Rescate