

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan las dos para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

La función está definida por tramos y es continua. Por ello, en cada punto de unión (0 y π), los límites laterales deben coincidir con el valor de la función.

a) En $x = 0$, el límite por la izquierda vale 2 y el valor dado por el tramo central es $2a$. La continuidad exige

$$2 = 2a \implies a = 1.$$

En $x = \pi$, el límite por la izquierda es $\pi^2 + 2a \cos \pi = \pi^2 - 2a$, mientras que el valor por el tramo derecho es $a\pi^2 + b$. Sustituimos $a = 1$ e igualamos:

$$\pi^2 - 2 = \pi^2 + b \implies b = -2.$$

Por tanto, $\boxed{a = 1, b = -2}$.

b) En los intervalos abiertos de cada tramo, la función es derivable. En los puntos de unión comparamos las derivadas laterales. En $x = 0$,

$$f'_-(0) = 3, \quad f'_+(0) = (2x - 2 \sin x)|_{x=0} = 0.$$

Como no coinciden, f no es derivable en 0. En $x = \pi$,

$$f'_-(\pi) = 2\pi - 2 \sin \pi = 2\pi, \quad f'_+(\pi) = 2\pi.$$

Coinciden, así que f sí es derivable en π . En conclusión, f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Opción A - Ejercicio 2

Para eliminar el valor absoluto escribimos la función por tramos. Si $x < 0$, $|x| = -x$; si $x \geq 0$, $|x| = x$. Por tanto,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x}, & -3 \leq x < 0, \\ \sqrt{3+x}, & 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Las dos ramas tienen la misma integral al cambiar x por $-x$. Así,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 f(x) dx &= 2 \int_0^3 \sqrt{3+x} dx \\ &= 2 \left[\frac{2}{3} (3+x)^{3/2} \right]_0^3 \\ &= \frac{4}{3} (6\sqrt{6} - 3\sqrt{3}) = \boxed{8\sqrt{6} - 4\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Opción A - Ejercicio 3

a) Sumamos primero las matrices:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = M.$$

Para calcular M^{-1} comprobamos el determinante y usamos la matriz adjunta:

$$\det M = 24, \quad \text{adj}(M) = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 5 \\ 20 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante no es cero, la inversa existe y vale

$$(A + B)^{-1} = M^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -10 & 4 & 5 \\ 20 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Usamos que el determinante de un producto es el producto de los determinantes, que $\det(A^{-1}) = 1/\det A$ y que una matriz y su traspuesta tienen el mismo determinante. La matriz A es triangular inferior, por lo que

$$\det A = (-2) \cdot 1 \cdot (-2) = 4.$$

Al ser matrices de orden 3, $\det(2A^{-1}) = 2^3 \det(A^{-1}) = 8/4 = 2$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \det(2A^{-1}(A+B)^t) &= \det(2A^{-1}) \det((A+B)^t) \\ &= 2 \det(A+B) = 2 \cdot 24 = \boxed{48}. \end{aligned}$$

Opción A - Ejercicio 4

El volumen del paralelepípedo generado por tres vectores es el valor absoluto de su determinante:

$$V = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|.$$

Con los vectores del enunciado,

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & \lambda \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} = -2(\lambda + 3), \quad V = 2|\lambda + 3|.$$

a) Pedimos que el volumen sea 6:

$$2|\lambda + 3| = 6 \iff |\lambda + 3| = 3,$$

por lo que $\lambda = 0$ o $\lambda = -6$.

b) Tres vectores son linealmente dependientes exactamente cuando el determinante que forman es cero. Así,

$$-2(\lambda + 3) = 0 \implies \boxed{\lambda = -3}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Al sustituir $x = 0$ en la expresión aparecen términos no acotados; reunimos las fracciones para aplicar la regla de L'Hôpital y calcular el límite:

$$\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x}.$$

Numerador y denominador tienden a cero. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x}.$$

Esta nueva expresión vuelve a ser de tipo $0/0$, por lo que aplicamos la regla una segunda vez:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = \boxed{0}.$$

Opción B - Ejercicio 2

Buscamos F tal que $F'(x) = x \arctan x$. Integramos por partes, tomando $u = \arctan x$ y $dv = x dx$; así, $du = \frac{dx}{1+x^2}$ y $v = \frac{x^2}{2}$:

$$\begin{aligned} \int x \arctan x dx &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{x^2+1}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

La gráfica pasa por $(0, \pi)$, de modo que $F(0) = \pi$. Al sustituir $x = 0$ resulta $C = \pi$. La primitiva pedida es

$$F(x) = \frac{x^2+1}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \pi.$$

Opción B - Ejercicio 3

Las dimensiones son A de 3×2 , B de 2×3 y C de 3×3 , así que AB y la incógnita X son matrices de orden 3. Calculamos primero el producto:

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Reordenamos la ecuación para dejar los términos con X a un lado:

$$ABX - 2C = CX \implies (AB - C)X = 2C.$$

La matriz de coeficientes de X es

$$D = AB - C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det D = -1 \neq 0.$$

Por tanto, existe una única solución y podemos despejar $X = D^{-1}(2C)$, donde

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}.$$

Efectuamos el producto con C y multiplicamos por 2:

$$D^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -20 & 19 & -12 \\ -15 & 15 & -10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -40 & 38 & -24 \\ -30 & 30 & -20 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Un vector director de r se obtiene restando las coordenadas de sus puntos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2 - 4, 0 - 3, 0 - 6) = (-6, -3, -6).$$

Podemos usar el vector proporcional $(2, 1, 2)$, por lo que r en forma paramétrica es

$$r : \begin{cases} x = 4 + 2t, \\ y = 3 + t, \\ z = 6 + 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

La recta s tiene punto $(2, 0, 1)$ y vector director $(1, 1, -2)$; sus ecuaciones paramétricas ya están dadas en el enunciado.

a) Los vectores directores $(2, 1, 2)$ y $(1, 1, -2)$ no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas. Para comprobar si se cortan, igualamos sus coordenadas:

$$4 + 2t = 2 + \lambda, \quad 3 + t = \lambda, \quad 6 + 2t = 1 - 2\lambda.$$

Las dos primeras ecuaciones dan $t = 1$ y $\lambda = 4$, pero estos valores no verifican la tercera ($8 \neq -7$). No se cortan y, al no ser paralelas, son rectas cruzadas.

b) Un punto genérico de s es $C_\lambda = (2 + \lambda, \lambda, 1 - 2\lambda)$. Para que $\overrightarrow{C_\lambda A}$ y $\overrightarrow{C_\lambda B}$ sean ortogonales, su producto escalar debe ser cero:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C_\lambda A} &= (2 - \lambda, 3 - \lambda, 5 + 2\lambda), \\ \overrightarrow{C_\lambda B} &= (-4 - \lambda, -\lambda, -1 + 2\lambda), \\ \overrightarrow{C_\lambda A} \cdot \overrightarrow{C_\lambda B} &= 6\lambda^2 + 7\lambda - 13 = 0. \end{aligned}$$

Factorizamos $6\lambda^2 + 7\lambda - 13 = (\lambda - 1)(6\lambda + 13)$; así, $\lambda = 1$ o $\lambda = -\frac{13}{6}$. Los puntos buscados son

$$C_1 = (3, 1, -1), \quad C_{-13/6} = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{13}{6}, \frac{16}{3}\right).$$