

PAU Madrid - Matemáticas II

Modelo orientativo de 2024

Se desarrollan las ocho preguntas del modelo. En el examen basta con responder a cuatro.

Pregunta A.1 - Sistemas de ecuaciones

Sean O el número de miembros de la orquesta, c el número de integrantes de cada coro no infantil e i el número de integrantes del coro infantil. El total de intérpretes de los coros es $T = 2c + i$; al contar a toda la agrupación se añaden además los ocho solistas. Los datos se traducen en

$$\frac{T}{10} = O - 15, \quad c = i + O + 140, \quad O = \frac{O + T + 8}{12} + 21.$$

De la primera igualdad, $T = 10O - 150$. La tercera, al multiplicarla por 12, equivale a

$$12O = O + T + 8 + 252 \implies T = 11O - 260.$$

Igualando las dos expresiones de T :

$$10O - 150 = 11O - 260 \implies O = 110.$$

Por tanto, $T = 950$. Como $c = i + O + 140 = i + 250$ y $T = 2c + i$,

$$950 = 2(i + 250) + i \implies i = 150, \quad c = 400.$$

El total de intérpretes, incluidos los ocho solistas, es $110 + 950 + 8 = 1068$. **Conclusión.** La orquesta tenía 110 miembros; cada coro no infantil, 400; el coro infantil, 150. En total participaron 1068 intérpretes.

Pregunta A.2 - Análisis

a) Límite en $x = 1$

La función es $f(x) = x\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$. Para $x \neq 1$, factorizamos el radicando y separamos el factor que aparece en el denominador:

$$\frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}} = \frac{x|x-1|^{2/3}|x+1|^{2/3}}{|x-1|^{2/3}} = x|x+1|^{2/3}.$$

Aquí $(x-1)^{2/3}$ se interpreta como $(\sqrt[3]{x-1})^2 = |x-1|^{2/3}$. Tomando el límite,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}} = 1 \cdot 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}.$$

Conclusión. El límite vale $\sqrt[3]{4}$.

b) Área entre $y = x$ y la gráfica de f en el primer cuadrante

En el primer cuadrante, $x \geq 0$ y

$$f(x) = x|x^2 - 1|^{2/3}.$$

Los puntos de corte con $y = x$ satisfacen $x = 0$ o $|x^2 - 1|^{2/3} = 1$. El segundo caso da $x = 0$ o $x = \sqrt{2}$, así que los extremos del recinto son 0 y $\sqrt{2}$. Entre ellos, $|x^2 - 1| < 1$, por lo que $f(x) \leq x$; el área se calcula con la diferencia «curva superior menos curva inferior». Separamos en $x = 1$ porque cambia la expresión del valor absoluto:

$$A = \int_0^1 x(1 - (1 - x^2)^{2/3}) dx + \int_1^{\sqrt{2}} x(1 - (x^2 - 1)^{2/3}) dx.$$

En los términos con potencias hacemos, respectivamente, los cambios $u = 1 - x^2$ y $u = x^2 - 1$:

$$\int_0^1 x(1 - x^2)^{2/3} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{2/3} du = \frac{3}{10}, \quad \int_1^{\sqrt{2}} x(x^2 - 1)^{2/3} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{2/3} du = \frac{3}{10}.$$

Además, $\int_0^{\sqrt{2}} x dx = 1$. Por tanto,

$$A = 1 - \frac{3}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{5}.$$

Conclusión. El área comprendida entre las gráficas en el primer cuadrante es $\frac{2}{5}$ unidades cuadradas.

Pregunta A.3 - Geometría en el espacio

a) Recta paralela a π y perpendicular a r

La recta r tiene vector director $(1, 0, 0)$ y el plano $\pi : z = 0$ tiene como direcciones los vectores con tercera coordenada nula. Un vector paralelo a π y perpendicular a r es, por ejemplo, $(0, 1, 0)$. La recta que pasa por $(1, 1, 1)$ con ese vector director es

$$s : \begin{cases} x = 1, \\ y = 1 + t, \\ z = 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta s cumple las dos condiciones.

b) Recta en π que forma un ángulo $\frac{\pi}{4}$ con r

Buscamos una dirección dentro de π , por lo que su vector director debe tener tercera coordenada cero. Elegimos $\vec{v} = (1, 1, 0)$. El vector director de r es $\vec{u} = (1, 0, 0)$, y

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

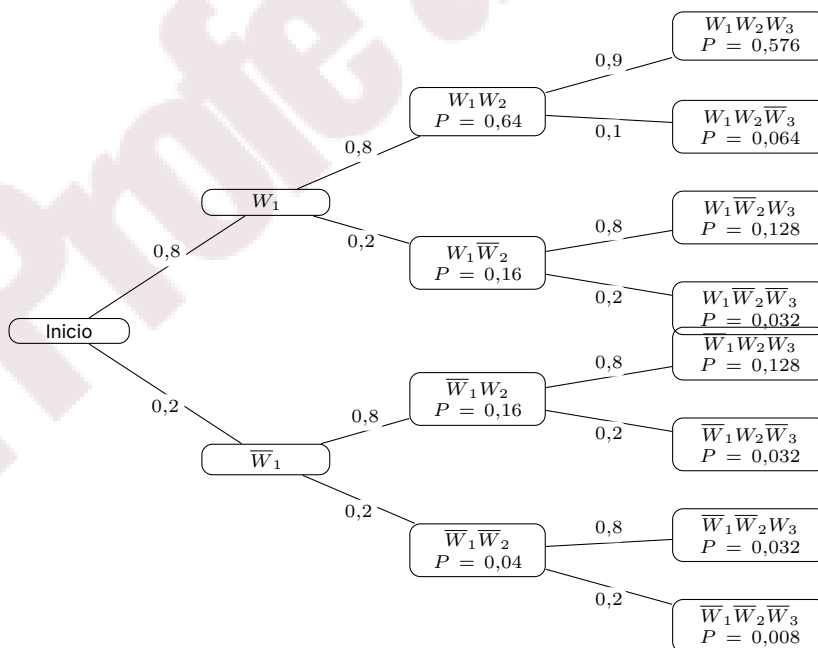
de modo que $\theta = \frac{\pi}{4}$. La recta que pasa por el origen con esa dirección es

$$\ell : \begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Una recta que cumple las condiciones es $\ell : (x, y, z) = t(1, 1, 0)$.

Pregunta A.4 - Probabilidad

Sean W_1, W_2, W_3 los sucesos de ganar, respectivamente, los tres partidos. Para los dos primeros usamos la probabilidad 0,8 de ganar cada uno; la probabilidad del tercero depende de si se han ganado ambos primeros partidos. En el árbol, cada hoja recoge la probabilidad conjunta del camino: multiplicamos las probabilidades de las ramas sucesivas.



a) Probabilidad de no ganar ningún partido

El único camino sin victorias es $\bar{W}_1 \bar{W}_2 \bar{W}_3$. Como al no ganar los dos primeros la probabilidad de perder el tercero es 0,2,

$$P(\bar{W}_1 \cap \bar{W}_2 \cap \bar{W}_3) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008.$$

Conclusión. La probabilidad de no ganar ningún partido es 0,008.

b) Probabilidad de ganar el tercer partido

El tercer partido se gana por dos vías incompatibles: ganar los dos primeros y, por tanto, tener probabilidad condicionada 0,9 de ganar el tercero; o no ganar ambos primeros, en cuyo caso esa probabilidad es 0,8. Sumamos las probabilidades de los caminos que terminan en victoria:

$$P(W_3) = 0,576 + 0,128 + 0,128 + 0,032 = 0,864.$$

Conclusión. La probabilidad de ganar el tercer partido es 0,864.

c) Probabilidad de no ganar los dos primeros, sabiendo que gana el tercero

Aplicamos la probabilidad condicionada:

$$P(\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 \mid W_3) = \frac{P(\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 \cap W_3)}{P(W_3)} = \frac{0,032}{0,864} = \frac{1}{27}.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es $\frac{1}{27} \approx 0,0370$.

Pregunta B.1 - Matrices

Sean

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Invertibilidad de BA

La matriz BA es de orden 3, pero su rango no puede superar el rango de A ni el de B . Como A tiene 2 filas y B tiene 2 columnas,

$$\text{rang}(BA) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B)) \leq 2 < 3.$$

Por tanto, BA es singular para cualquier valor de m . **Conclusión.** No existe ningún valor de m para el que BA tenga inversa.

b) Rango de AB según m

Multiplicamos las matrices para obtener la matriz cuadrada de orden 2:

$$AB = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m^2 + m + 1 \\ 0 & m^2 + 3 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $m(m^2 + 3)$. Como $m^2 + 3 > 0$ para todo $m \in \mathbb{R}$, este determinante se anula solo si $m = 0$. En ese caso

$$AB|_{m=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

que tiene rango 1. **Conclusión.** $\text{rang}(AB) = 2$ si $m \neq 0$ y $\text{rang}(AB) = 1$ si $m = 0$.

c) Discusión del sistema $(A^T A)X = b$ para $m = 1$

Para $m = 1$,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad (A^T A)^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & 4 & 10 & a^2 \end{array} \right).$$

La matriz de coeficientes tiene determinante cero, pero el menor de las dos primeras filas y columnas vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

así que su rango es 2. Para decidir si la ampliada tiene el mismo rango, comprobamos el menor formado por sus dos primeras columnas y la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = a(a - 1).$$

Si $a \neq 0, 1$, este menor es distinto de cero y el rango ampliado es 3; como el de coeficientes es 2, Rouché-Frobenius indica que el sistema es incompatible.

Para $a = 0$ o $a = 1$, el menor anterior se anula y la compatibilidad puede verse resolviendo el sistema. Las ecuaciones de coeficientes equivalen a

$$x + y + z = b_1, \quad y + 3z = 0, \quad \text{la tercera ecuación repite la condición } 2y + 6z = 0.$$

Si $a = 0$, el término independiente es nulo y las soluciones son

$$(x, y, z) = t(2, -3, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $a = 1$, una solución particular es $(1, 0, 0)$ y se suma el mismo vector del núcleo:

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(2, -3, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En ambos casos los rangos son iguales a 2, menor que el número de incógnitas, así que los sistemas son compatibles indeterminados. **Conclusión.** El sistema es SCI para $a = 0$ y $a = 1$; es SI para cualquier otro valor de a .

Pregunta B.2 - Análisis

a) Dominio y asíntotas de $f(x) = x - \frac{4}{(x-1)^2}$

La función racional está definida cuando su denominador no se anula, por lo que

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Al aproximarnos a $x = 1$ por cualquiera de los lados, $(x-1)^2 \rightarrow 0^+$ y $f(x) \rightarrow -\infty$; así, $x = 1$ es una asíntota vertical.

Para buscar las asíntotas en los infinitos, calculamos primero la pendiente de la posible oblicua:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{4}{x(x-1)^2}\right) = 1.$$

El término independiente es

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{4}{(x-1)^2} = 0.$$

Por tanto, $y = x$ es asíntota oblicua. Como $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$, no hay asíntotas horizontales. **Conclusión.** El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; las asíntotas son $x = 1$ y $y = x$.

b) Crecimiento y extremos relativos

La derivada permite determinar dónde crece o decrece la función:

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x+1)(x^2-4x+7)}{(x-1)^3}.$$

El factor x^2-4x+7 es siempre positivo, pues su discriminante es $16-28 < 0$. Los puntos que separan intervalos son el crítico $x = -1$ y el valor excluido del dominio $x = 1$. El signo de la derivada es

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo de f'	+	-	+
Comportamiento	creciente	decreciente	creciente

En $x = -1$ la derivada cambia de positiva a negativa, así que hay un máximo relativo. Su ordenada es

$$f(-1) = -1 - \frac{4}{(-2)^2} = -2.$$

Conclusión. La función crece en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, decrece en $(-1, 1)$ y tiene un máximo relativo en $(-1, -2)$.

c) Tangente paralela a $9x - 8y = 6$

La pendiente de la recta dada es $\frac{9}{8}$. Una tangente paralela debe tener la misma pendiente; por tanto, resolvemos $f'(x) = \frac{9}{8}$:

$$1 + \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{9}{8} \implies (x-1)^3 = 64 \implies x = 5.$$

El punto de tangencia es

$$(5, f(5)) = \left(5, \frac{19}{4}\right).$$

Usando la ecuación punto-pendiente,

$$y - \frac{19}{4} = \frac{9}{8}(x - 5) \implies 9x - 8y = 7.$$

Conclusión. La tangente pedida es $9x - 8y = 7$.

Pregunta B.3 - Geometría en el espacio

a) Coplanaridad y volumen del tetraedro

Tomamos A como vértice común. Los tres vectores son

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1-0, 1-0, 0-1) = (1, 1, -1),$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1 - 0, 0 - 0, -1 - 1) = (1, 0, -2), \quad \overrightarrow{AD} = D - A = (1 - 0, 1 - 0, 2 - 1) = (1, 1, 1).$$

El producto mixto determina si los cuatro puntos son coplanarios:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, 1, -1), \quad (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = -2 + 1 - 1 = -2 \neq 0.$$

No son coplanarios. El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto de ese producto:

$$V = \frac{1}{6} |-2| = \frac{1}{3}.$$

Conclusión. Los puntos no son coplanarios y el volumen es $\frac{1}{3}$ unidades cúbicas.

b) Área de BCD y ángulo $\hat{B}$

Calculamos dos lados que parten de B :

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (1 - 1, 0 - 1, -1 - 0) = (0, -1, -1),$$

$$\overrightarrow{BD} = D - B = (1 - 1, 1 - 1, 2 - 0) = (0, 0, 2).$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial:

$$\text{Área}(BCD) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\| = \frac{1}{2} \|(0, 0, 0)\| = 1.$$

Para el ángulo en B usamos el producto escalar:

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\|\overrightarrow{BC}\| \|\overrightarrow{BD}\|} = \frac{-2}{\sqrt{2} \cdot 2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto, $\hat{B} = \frac{3\pi}{4}$ radianes. **Conclusión.** El área de BCD es 1 unidad cuadrada y $\hat{B} = \frac{3\pi}{4}$.

c) Paralelogramo $ABCE$

En el paralelogramo con vértices consecutivos A, B, C, E , las diagonales AC y BE tienen el mismo punto medio. Equivalentemente, $E = A + C - B$:

$$E = (0, 0, 1) + (1, 0, -1) - (1, 1, 0) = (0, -1, 0).$$

Los lados consecutivos tienen vectores

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1), \quad \overrightarrow{BC} = (0, -1, -1).$$

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de estos lados:

$$\text{Área}(ABCE) = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\| = \|(-2, 1, -1)\| = \sqrt{6}.$$

Conclusión. Un punto válido es $E = (0, -1, 0)$ y el área del paralelogramo es $\sqrt{6}$ unidades cuadradas.

Pregunta B.4 - Probabilidad

Los sucesos A_1 y A_2 son incompatibles y $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$; por ello, A_1, A_2, A_3 forman una partición del espacio muestral.

a) Probabilidad de A_3

Al ser incompatibles, $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$. Entonces,

$$P(A_3) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - 0,5 - 0,3 = 0,2.$$

Conclusión. $P(A_3) = 0,2$.

b) Independencia de B y A_2

Como B es independiente de A_1 ,

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1)P(B) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2.$$

Las tres intersecciones con B son incompatibles y cubren B , así que

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B).$$

Despejamos la intersección restante:

$$P(A_2 \cap B) = 0,4 - 0,2 - 0,1 = 0,1.$$

Si A_2 y B fueran independientes, esta intersección tendría probabilidad $P(A_2)P(B) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$. Como $0,1 \neq 0,12$, no son independientes. **Conclusión.** A_2 y B son dependientes.