Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2010--2011 · Modelo 2

Se resuelven las dos opciones completas. Los resultados se obtienen desde los datos del enunciado.

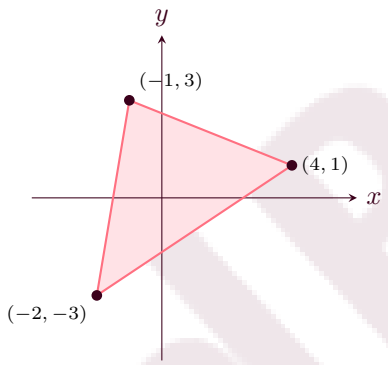
Opción A

Ejercicio 1 · Programación lineal

El recinto viene dado por $6x - y + 9 \geq 0$, $2x + 5y \leq 13$ y $2x - 3y \leq 5$. Para dibujarlo, representamos las rectas frontera; cada desigualdad selecciona uno de sus semiplanos. Las intersecciones de las tres fronteras son:

$$\begin{aligned} 6x - y + 9 = 0,\ 2x + 5y = 13 &\Longrightarrow (-1, 3), \\ 6x - y + 9 = 0,\ 2x - 3y = 5 &\Longrightarrow (-2, -3), \\ 2x + 5y = 13,\ 2x - 3y = 5 &\Longrightarrow (4, 1). \end{aligned}$$

Los tres puntos cumplen las desigualdades restantes, por lo que son los vértices del recinto triangular.



La función objetivo $F(x, y) = 3x - 2y + 3$ es lineal, así que sus extremos se alcanzan en los vértices. Sustituimos sus coordenadas:

(x, y)	$(-1, 3)$	$(-2, -3)$	$(4, 1)$
$F(x, y)$	-6	3	13

$$\boxed{F_{\text{min}} = -6 \text{ en } (-1, 3), \qquad F_{\text{max}} = 13 \text{ en } (4, 1).}$$

Ejercicio 2 · Continuidad, derivabilidad y extremos

La función está definida en todo $\mathbb{R}$: la primera y la tercera expresiones son polinómicas, y en el tramo de $4/x$ se tiene $2 \leq x < 4$, por lo que el denominador no se anula.

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < 2, \\ 4/x, & 2 \leq x < 4, \\ x^2 - 4x + 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

Los únicos puntos donde puede fallar la continuidad o derivabilidad son los cambios de expresión, $x = 2$ y $x = 4$. En $x = 2$,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 6, \qquad f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2,$$

así que hay una discontinuidad de salto y la función no es derivable. En $x = 4$, ambos límites y el valor coinciden:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1 = f(4) = \lim_{x \to 4^+} f(x),$$

por lo que es continua. Sin embargo, las derivadas laterales no coinciden:

$$\left(\frac{4}{x}\right)'_{x=4} = -\frac{1}{4}, \qquad (x^2 - 4x + 1)'_{x=4} = 2 \cdot 4 - 4 = 4.$$

Por tanto, tampoco es derivable en $x = 4$.

En los tramos, $f' = 1$ si $x < 2$, $f' = -4/x^2 < 0$ si $2 < x < 4$ y $f' = 2x - 4 > 0$ si $x > 4$. La función decrece hasta 4 a la derecha de la discontinuidad y crece después; como $f(4) = 1$, hay un mínimo relativo en $(4, 1)$. En $x = 2$ no hay extremo, porque a la izquierda los valores son mayores que $f(2)$ y a la derecha son menores.

Para la tangente en $x=3$, usamos la expresión válida en ese tramo, $4/x$. Así, $f(3)=4/3$ y $f'(3)=-4/9$. La ecuación punto-pendiente es $y-f(3)=f'(3)(x-3)$:

$$y-\frac{4}{3}=-\frac{4}{9}(x-3)\Longrightarrow y=-\frac{4}{9}x+\frac{8}{3}.$$

Discontinua en $x=2$; continua pero no derivable en $x=4$; mínimo relativo $(4,1)$; $t(x)=-\frac{4}{9}x+\frac{8}{3}$.

Ejercicio 3 · Probabilidad e independencia

Sean T «aprobar la parte teórica» y P «aprobar la parte práctica». Se conocen $P(T)=0{,}7$, $P(P)=0{,}75$ y $P(T\cap P)=0{,}5$.

«Aprobar alguna» corresponde a la unión, para la que se resta la intersección porque se contaría dos veces:

$$P(T\cup P)=P(T)+P(P)-P(T\cap P)=0{,}7+0{,}75-0{,}5=0{,}95.$$

Si no se ha aprobado la teoría, la probabilidad condicionada de aprobar la práctica es

$$P(P\mid T^c)=\frac{P(P\cap T^c)}{P(T^c)}=\frac{P(P)-P(T\cap P)}{1-P(T)}=\frac{0{,}75-0{,}5}{0{,}3}=\frac{5}{6}.$$

Para que fueran independientes debería cumplirse $P(T\cap P)=P(T)P(P)$. Pero $0{,}5\neq 0{,}7\cdot 0{,}75=0{,}525$; no son independientes.

$P(T\cup P)=0{,}95$; $P(P\mid T^c)=\frac{5}{6}$; T y P no son independientes.

Ejercicio 4 · Contraste para una proporción

La afirmación del director es que al menos el 30% verá el programa. Para comprobar si la encuesta aporta evidencia de una proporción inferior, planteamos un contraste unilateral a la izquierda, tomando como valor frontera $p_0=0{,}30$:

$$H_0: p\geq 0{,}30,\qquad H_1: p<0{,}30.$$

En la muestra, $n=500$, $\hat{p}=130/500=0{,}26$. Bajo la hipótesis frontera, la desviación típica de la proporción muestral es $\sqrt{p_0(1-p_0)/n}$, y el estadístico vale

$$z=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}=\frac{0{,}26-0{,}30}{\sqrt{0{,}30\cdot 0{,}70/500}}\approx -1{,}952.$$

Con $\alpha=0{,}055$, el valor crítico unilateral es $z_{0{,}055}\approx -1{,}598$. La región crítica es $z<-1{,}598$; como $-1{,}952<-1{,}598$, rechazamos H_0. La encuesta sí ofrece evidencia, al nivel indicado, contra la afirmación de que al menos un 30% verá el programa.

Se rechaza H_0 al $5{,}5\%$; los datos no respaldan la afirmación del director.

Opción B

Ejercicio 1 · Operaciones con matrices y aplicación económica

Las dimensiones determinan qué operaciones se pueden efectuar. M y N^T son matrices 2×3, así que se pueden sumar. Como N es 3×2, M^TN no está definido (las dimensiones interiores serían 2 y 3), mientras que MN sí está definido:

$$M+N^T=\begin{pmatrix}0&3&1\\1&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6&2\\2&1&2\end{pmatrix},\qquad MN=\begin{pmatrix}0&3&1\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&3\\4&1\end{pmatrix}.$$

En la aplicación del café, P contiene kilogramos por modalidad y tipo y Q sus precios por kilogramo. El producto PQ^T suma, para cada pareja de tipos, los ingresos de las tres modalidades:

$$PQ^T=\begin{pmatrix}550&400&240\\260&200&100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2{,}20&3{,}20\\2{,}75&3{,}90\\2{,}50&3{,}60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2910&4184\\1372&1972\end{pmatrix}.$$

La diagonal principal da los ingresos totales de cada tipo: 2910 euros por el café natural y 1972 euros por el descafeinado.

$$\boxed{M+N^T=\begin{pmatrix}2&6&2\\2&1&2\end{pmatrix};\quad M^TN\text{ no existe};\quad MN=\begin{pmatrix}10&3\\4&1\end{pmatrix};\quad \operatorname{diag}(PQ^T)=(2910,1972)\ €.}$$

Ejercicio 2 · Derivadas

Para $f(x)=(2^x+x^2)/x$, el dominio es $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Aplicamos la regla del cociente:

$$f'(x)=\frac{x(\ln 2\,2^x+2x)-(2^x+x^2)}{x^2}=\frac{2^x(x\ln 2-1)}{x^2}+1.$$

Para $g(x)=(x^2+1)^2\ln(e^{3x}+4)$, el dominio es $\mathbb{R}$, pues el argumento del logaritmo es positivo. Usando las reglas del producto y de la cadena:

$$g'(x)=4x(x^2+1)\ln(e^{3x}+4)+(x^2+1)^2\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+4}.$$

Finalmente, $h(x)=\frac{1}{3x}-\frac{5}{x^2-2}$ está definida si $x\neq 0$ y $x^2\neq 2$. Derivamos cada término:

$$h'(x)=-\frac{1}{3x^2}+\frac{10x}{(x^2-2)^2}.$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2^x(x\ln 2-1)}{x^2}+1;\quad g'(x)=4x(x^2+1)\ln(e^{3x}+4)+(x^2+1)^2\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+4};\quad h'(x)=-\frac{1}{3x^2}+\frac{10x}{(x^2-2)^2}.}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad total y teorema de Bayes

Sean L «hay riesgo de lluvia» y P «Pedro coge el paraguas». Los datos son $P(L)=0{,}4$, $P(L^c)=0{,}6$, $P(P\mid L)=0{,}98$ y $P(P\mid L^c)=0{,}05$. Para no cogerlo, las probabilidades condicionadas son $0{,}02$ si llueve y $0{,}95$ si no llueve. Sumamos los dos casos incompatibles:

$$P(P^c)=P(L)P(P^c\mid L)+P(L^c)P(P^c\mid L^c)=0{,}4\cdot 0{,}02+0{,}6\cdot 0{,}95=0{,}578.$$

Para invertir la condición y hallar la probabilidad de lluvia sabiendo que sí cogió el paraguas, aplicamos Bayes:

$$P(L\mid P)=\frac{P(L)P(P\mid L)}{P(L)P(P\mid L)+P(L^c)P(P\mid L^c)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}98}{0{,}4\cdot 0{,}98+0{,}6\cdot 0{,}05}=\frac{196}{211}\approx 0{,}929.$$

$$\boxed{P(\text{no coge el paraguas})=0{,}578;\qquad P(L\mid P)=\frac{196}{211}\approx 0{,}929.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza y tamaño muestral

La media muestral de los pesos es $\bar{x}=5274/36=146{,}5$ g. Con desviación típica poblacional conocida $\sigma=7$ g y confianza del 94%, el intervalo para la media es

$$\bar{x}\pm z_{0{,}97}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\qquad z_{0{,}97}\approx 1{,}8808.$$

La semiamplitud (error máximo) vale

$$E=1{,}8808\frac{7}{\sqrt{36}}\approx 2{,}1943\ \text{g},$$

y por tanto

$$IC_{94\%}(\mu)=(146{,}5-2{,}1943,\ 146{,}5+2{,}1943)\approx(144{,}3057,148{,}6943)\ \text{g}.$$

Si se aumenta el tamaño muestral, manteniendo el mismo nivel de confianza, la amplitud total $2E=2z_{0{,}97}\sigma/\sqrt{n}$ disminuye. Para que no supere 3 g:

$$\frac{2\cdot 1{,}8808\cdot 7}{\sqrt{n}}\le 3\Longrightarrow n\ge\left(\frac{2\cdot 1{,}8808\cdot 7}{3}\right)^2\approx 77{,}05.$$

Redondeamos hacia arriba para garantizar la condición.

$$\boxed{IC_{94\%}(\mu)\approx(144{,}3057,148{,}6943)\ \text{g};\quad E\approx 2{,}1943\ \text{g};\quad n_{\min}=78.}$$