

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de junio de 2015

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Dominio, asíntotas, tangente e integral

La función es

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}.$$

El logaritmo exige $x+1 > 0$, es decir, $x > -1$. Además, $x^2 - 4 \neq 0$; de sus raíces $x = \pm 2$, solo $x = 2$ pertenece a ese intervalo. Así,

$$D_f = (-1, 2) \cup (2, +\infty).$$

Los posibles puntos de asíntota vertical son los extremos del dominio y los ceros del denominador. Al acercarnos a $x = -1$ por la derecha, el primer sumando tiende a $\frac{1}{3}$, mientras que, poniendo $u = x+1 \rightarrow 0^+$, el segundo es $\frac{\ln u}{u} \rightarrow -\infty$. Luego $x = -1$ es asíntota vertical. En $x = 2$, el segundo sumando tiene límite finito y el primero diverge: tiende a $-\infty$ por la izquierda y a $+\infty$ por la derecha. Por tanto, $x = 2$ también es asíntota vertical.

Cuando $x \rightarrow +\infty$, ambos sumandos tienden a cero, pues se comportan como $1/x$ y $\ln x/x$. Entonces $y = 0$ es asíntota horizontal. Al haber una asíntota horizontal en el único extremo infinito del dominio, no hay que buscar una oblicua adicional.

Para la tangente en $x = 0$, evaluamos primero $f(0) = 0$. Derivamos cada sumando:

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2} + \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}, \quad f'(0) = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}.$$

La recta tangente es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, por lo que $y = \frac{3}{4}x$.

Para la primitiva usamos sustitución en cada sumando:

$$\int \frac{x}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4|, \quad \int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \frac{1}{2} (\ln(x+1))^2.$$

En la primera integral, la derivada del denominador $x^2 - 4$ es $2x$; en la segunda, usamos $u = \ln(x+1)$, $du = dx/(x+1)$. **Conclusión.** El dominio es $(-1, 2) \cup (2, +\infty)$; las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 2$, la horizontal es $y = 0$, la tangente es $y = \frac{3}{4}x$ y una primitiva es $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| + \frac{1}{2} \ln^2(x+1) + C$.

Opción A - Ejercicio 2. Discusión de un sistema

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & m-1 \\ 1 & -2 & m \\ 5 & m & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & m-1 & 0 \\ 1 & -2 & m & 1 \\ 5 & m & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Calculamos el determinante de A para localizar los valores en los que puede disminuir el rango:

$$\det A = -3(m-7)(m-1).$$

Si $m \neq 1, 7$, el determinante es distinto de cero; por ello $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, y Rouché-Frobenius da un sistema compatible determinado.

Para $m = 1$ o $m = 7$, el determinante se anula. El menor formado por las dos primeras filas y columnas vale

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11 \neq 0,$$

así que $\text{rg}(A) = 2$ en ambos casos. Si $m = 1$, la tercera fila de la matriz ampliada es la suma de las dos primeras, incluidos los términos independientes: $(5, 1, 1 | 1) = (4, 3, 0 | 0) + (1, -2, 1 | 1)$. Entonces $\text{rg}(A^*) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado. Si $m = 7$, el menor de A^* formado por las columnas primera, segunda y de términos independientes es

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -24 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A^*) = 3 > \text{rg}(A)$ y el sistema es incompatible. **Conclusión.** El sistema es SCD si $m \neq 1, 7$, SCI si $m = 1$ y SI si $m = 7$.

b) **Solución para $m = 1$.** La tercera ecuación es la suma de las dos primeras, así que basta resolver

$$4x + 3y = 0, \quad x - 2y + z = 1.$$

Tomamos $z = t$ como parámetro. De la segunda ecuación, $x = 1 + 2y - t$. Al sustituir en la primera,

$$4(1 + 2y - t) + 3y = 0 \implies y = \frac{4t - 4}{11},$$

y, por tanto, $x = \frac{3-3t}{11}$. **Conclusión.** Para $m = 1$, $(x, y, z) = (\frac{3-3t}{11}, \frac{4t-4}{11}, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Opción A - Ejercicio 3. Volumen y recta

a) **Volumen del paralelepípedo.** El volumen generado por tres vectores es el valor absoluto de su determinante (equivalentemente, de su producto mixto). Calculamos

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2, 3, 4) \times (-1, -1, -1) = (1, -2, 1),$$

y

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (1, -2, 1) \cdot (-1, \lambda, -5) = -2\lambda - 6.$$

La condición de volumen 6 da $|-2\lambda - 6| = 6$, de donde $-2\lambda - 6 = 6$ o $-2\lambda - 6 = -6$. **Conclusión.** $\lambda = -6$ o $\lambda = 0$.

b) **Recta en el plano $z = 0$.** Su vector director debe ser paralelo al plano $z = 0$, así que tiene forma $(a, b, 0)$. Para que sea perpendicular a $\vec{u} = (2, -1, 4)$, imponemos producto escalar cero:

$$(2, -1, 4) \cdot (a, b, 0) = 2a - b = 0.$$

Podemos tomar como director $(1, 2, 0)$. Con el punto $(1, 1, 0)$, la recta en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4. Planos tangentes a una esfera

La esfera tiene centro $C = (1, 1, 2)$ y radio $r = 3$. Todo plano paralelo a π tiene el mismo vector normal $(1, -2, 2)$ y, por tanto, la forma

$$x - 2y + 2z + d = 0.$$

Para que sea tangente a la esfera, la distancia del centro al plano debe ser igual al radio. Usando la fórmula de distancia de un punto a un plano,

$$\frac{|1 - 2 + 4 + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3 \implies \frac{|3 + d|}{3} = 3.$$

Así, $3 + d = 9$ o $3 + d = -9$, de donde $d = 6$ o $d = -12$. **Conclusión.** Los planos tangentes pedidos son $x - 2y + 2z + 6 = 0$ y $x - 2y + 2z - 12 = 0$.

Opción B - Ejercicio 1. Proyecciones y distancias a una recta

Escribimos la recta en forma paramétrica, tal como aparece en el enunciado:

$$r : \begin{cases} x = -4 + 4\lambda, \\ y = 8 + 3\lambda, \\ z = -2\lambda, \end{cases} \quad \vec{v} = (4, 3, -2).$$

a) **Punto cuya proyección sobre OP es el punto medio.** El punto medio de OP es $M = (-2, 3, 3)$. Si Q se proyecta ortogonalmente en M , entonces $Q - M$ es perpendicular a OP , cuyo vector director es $\vec{p} = (-4, 6, 6)$. Un punto genérico de r es $Q = (-4 + 4\lambda, 8 + 3\lambda, -2\lambda)$. Imponemos

$$(Q - M) \cdot \vec{p} = (-2 + 4\lambda, 5 + 3\lambda, -3 - 2\lambda) \cdot (-4, 6, 6) = 20 - 10\lambda = 0,$$

por lo que $\lambda = 2$ y $Q = (4, 14, -4)$. **Conclusión.** El punto pedido es $Q = (4, 14, -4)$.

b) Distancia de P a r . La distancia de un punto a una recta se obtiene con

$$d(P, r) = \frac{\|(P - R_0) \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|},$$

donde $R_0 = (-4, 8, 0)$ es un punto de r . Tenemos $P - R_0 = (0, -2, 6)$ y

$$(P - R_0) \times \vec{v} = (-14, 24, 8), \quad \|(P - R_0) \times \vec{v}\| = 2\sqrt{209}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{29}.$$

Conclusión. $d(P, r) = \frac{2\sqrt{209}}{\sqrt{29}}.$

c) Alineación de O , P y un punto de r . Si R estuviese en la recta OP , tendría la forma $R = tP = (-4t, 6t, 6t)$. Para que también pertenezca a r , igualamos las primeras dos coordenadas:

$$-4t = -4 + 4\lambda, \quad 6t = 8 + 3\lambda.$$

Estas ecuaciones dan $\lambda = -\frac{2}{9}$ y $t = \frac{11}{9}$. Pero entonces la tercera coordenada de r es $-2\lambda = \frac{4}{9}$, mientras que la de tP es $6t = \frac{22}{3}$. No coinciden, así que el punto no existe. **Conclusión.** No existe ningún punto $R \in r$ alineado con O y P .

Opción B - Ejercicio 2. Continuidad, derivabilidad e integral

Para $x < 0$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, y para $x \geq 0$, $f(x) = xe^x + 1$. En $x = 0$, $f(0) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$; la expresión de la derecha también tiende a 1. Por ello, f es continua en 0 y, como es continua en cada rama, lo es en todo $\mathbb{R}$.

Derivamos en cada intervalo:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, & x < 0, \\ e^x(x+1), & x > 0. \end{cases}$$

La derivada lateral izquierda en 0 vale 0, pues $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = 0$ (por ejemplo, aplicando L'Hôpital una vez tras obtener una indeterminación 0/0). La derivada lateral derecha vale $e^0(0+1) = 1$. Como no coinciden, f no es derivable en 0.

En $[1, 3]$ se usa la rama $xe^x + 1$. Una primitiva es $(x-1)e^x + x$, ya que su derivada es $xe^x + 1$. Así,

$$\int_1^3 f(x) dx = [(x-1)e^x + x]_1^3 = (2e^3 + 3) - 1 = 2e^3 + 2.$$

Conclusión. f es continua en $\mathbb{R}$, no es derivable en 0 y $\int_1^3 f(x) dx = 2e^3 + 2$.

Opción B - Ejercicio 3. Potencias y ecuación matricial

La matriz A intercambia la primera y la tercera coordenada y deja fija la segunda. Por tanto,

$$A^2 = I.$$

Las potencias se repiten con periodo 2: las impares son A y las pares son I . Como 15 es impar y 20 es par,

$$A^{15} = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{20} = I.$$

Para la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, observamos que $B = 3I$. Reordenamos y dividimos entre 3:

$$6X + 3AX = 3I \implies (2I + A)X = I.$$

Como $A^2 = I$, se cumple $(2I + A)(2I - A) = 4I - A^2 = 3I$, de manera que $(2I + A)^{-1} = (2I - A)/3$. Por ello,

$$X = \frac{2I - A}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. $A^{15} = A$, $A^{20} = I$ y $X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Opción B - Ejercicio 4. Rango y determinante

La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante:

$$\det A = (t - 7)(t - 2).$$

Si $t \neq 2, 7$, el rango es 3. En los dos valores que anulan el determinante, el menor de las dos primeras filas y columnas vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t \end{vmatrix} = t,$$

que no se anula ni para $t = 2$ ni para $t = 7$. Por ello el rango es 2 en esos dos casos. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 2$ para $t = 2$ o $t = 7$; en los demás casos, $\text{rg}(A) = 3$.

Para la segunda condición, restamos tI y calculamos el determinante de la matriz resultante:

$$A - tI = \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A - tI) = -2(t - 7).$$

Conclusión. $\det(A - tI) = 0$ únicamente para $t = 7$.