

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calcular A^{-1} .
b) Determina la matriz X tal que $AX = A + B$.

Solución:

a) A^{-1} .

Calculamos el determinante de la matriz A ,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (F_2 - F_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculemos A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Y, finalmente, } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -5/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

b) Determina la matriz X tal que $AX = A + B$.

Multiplicamos la expresión anterior por A^{-1} por la izquierda,

$$A^{-1}AX = A^{-1}(A + B); \quad IX = A^{-1}A + A^{-1}B; \quad X = I + A^{-1}B$$

En primer lugar, calculamos $A^{-1}B$

$$\begin{aligned} A^{-1}B &= \begin{pmatrix} 8/3 & -5/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \cdot 0 - \frac{5}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 2 & -\frac{8}{3} - \frac{5}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 1 & \frac{8}{3} \cdot 2 + \frac{5}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 \\ -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & -1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 & -\frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 & \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -7/3 & -9/3 & 21/3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1/3 & 0 & 3/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/3 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1/3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tu Profe al Rescate

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. El departamento de análisis financiero de una consultora determina que la rentabilidad $R(x)$, en miles de euros, de cierta inversión, en función de la cantidad invertida en miles de euros, x , viene dada por la siguiente expresión:

$$R(x) = -0,01x^2 + 0,1x + 1, \quad x > 0$$

- ¿Cuántos euros conviene invertir para maximizar la rentabilidad? ¿Cuál será dicha rentabilidad máxima?
- Determina la función que proporciona la rentabilidad media (es decir, el cociente entre la rentabilidad y la cantidad invertida) de dicha inversión y estudia la evolución de dicha rentabilidad media en función de la cantidad invertida.

Solución:

a) Busquemos el máximo de $R(x)$.

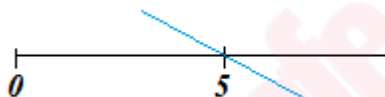
x y $R(x)$ son miles de euros.

Por definición, $\text{Dom } R(x) = (0, +\infty)$ {intervalo abierto}

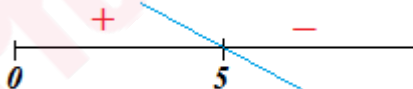
$$R'(x) = -0,02x + 0,1$$

$$-0,02x + 0,1 = 0 \rightarrow -0,02x = -0,1 \rightarrow x = \frac{-0,1}{-0,02} = 5$$

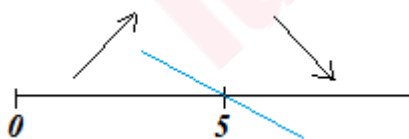
Estudiamos el signo de $R'(x)$. $R'(x)$, gráficamente, es una línea recta de pendiente negativa que pasa por $(5, 0)$, luego:



Por tanto, el signo de $R'(x)$ es:



Y $R(x)$



es creciente a la izquierda de 5 y decreciente a la derecha.

Luego en $x = 5$ hay un máximo relativo, pero como a la izquierda de $x = 5$ la función es creciente y a la derecha decreciente este máximo relativo es el absoluto de $R(x)$.

$$\text{Para } x = 5, \quad R(5) = -0,01 \cdot 5^2 + 0,1 \cdot 5 + 1 = 1,25 \quad \{x = 5 \text{ miles de euros}; R(5) = 1,25 \text{ miles de euros}\}$$

Finalmente, para maximizar la rentabilidad conviene invertir 5000€ y la rentabilidad máxima será de 1250€.

b) La función de rentabilidad media (RM) será: $RM(x) = \frac{R(x)}{x} = \frac{-0,01x^2 + 0,1x + 1}{x} = -0,01x + 0,1 + \frac{1}{x}, \quad x > 0$

Para estudiar la evolución de $RM(x)$ en función de x , estudiémosla para representarla gráficamente.

Por definición, $\text{Dom } RM(x) = (0, +\infty)$

Puntos de corte con ejes coordenados,

$$y=0 \rightarrow -0'01x+0'1+\frac{1}{x}=0 \rightarrow -0'01x^2+0'1x+1=0 \rightarrow x=\frac{-0'1\pm\sqrt{0'1^2-4\cdot(-0'01)\cdot1}}{2\cdot(-0'01)}=$$

$$=\frac{-0'1\pm\frac{\sqrt{5}}{10}}{-0'02}=\begin{cases} x_1=\frac{-0'1+\frac{\sqrt{5}}{10}}{-0'02}=-6'\dots\notin \text{Dom } RM(x) \\ x_2=\frac{-0'1-\frac{\sqrt{5}}{10}}{-0'02}=16'1803 \end{cases} \rightarrow \text{Punto de corte } (16'1803, 0)$$

Monotonía,

$$RM'(x)=-0'01-\frac{1}{x^2}, \text{ por lo tanto } \forall x\in \text{Dom } RM(x), \quad RM'(x)<0$$

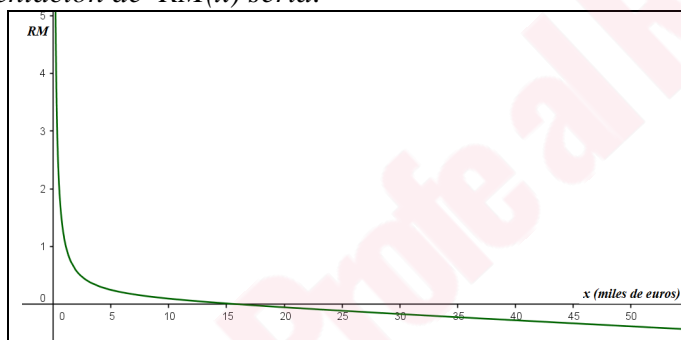
Luego $RM(x)$ es decreciente en su dominio.

Asíntotas,

$$\lim_{x\rightarrow 0^+} RM(x)=\lim_{x\rightarrow 0^+}\left(-0'01x+0'1+\frac{1}{x}\right)=0+0'1+\frac{1}{0}=+\infty \Rightarrow x=0 \text{ es asíntota vertical por la derecha.}$$

$$\lim_{x\rightarrow +\infty} RM(x)=\lim_{x\rightarrow +\infty}\left(-0'01x+0'1+\frac{1}{x}\right)=-\infty+0'1+\frac{1}{+\infty}=-\infty+0=-\infty \Rightarrow \text{No hay asíntota horizontal}$$

La representación de $RM(x)$ sería:



Por tanto, la rentabilidad media es decreciente y a partir de 16'1803 miles de euros de inversión es negativa.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Juan va normalmente a alquilar películas a uno de los tres videoclubs siguientes: A, B y C. Se sabe que la probabilidad de que vaya al videoclub C es 0,2 y que la probabilidad de que vaya al A es la misma que la probabilidad de que vaya al B. En el videoclub A el 35% de las películas son españolas, el 55% en el B y el 40% en el C. Un día va a un videoclub y una vez allí elige aleatoriamente una película. Se pide:

- ¿Cuál es la probabilidad de que haya ido al videoclub A?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la película elegida sea española?
- Suponiendo que ha elegido una película no española, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido al videoclub C?

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

A = Juan ha ido al videoclub A

B = Juan ha ido al videoclub B

C = Juan ha ido al videoclub C

E = la película elegida es española

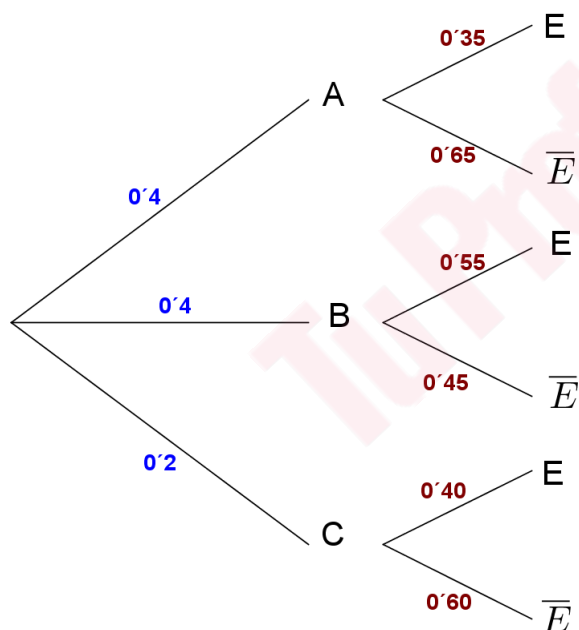
$\bar{E}$ = la película elegida no es española

Del enunciado sabemos que $P(A) = P(B)$ y $P(C) = 0,2$.

Como Juan va a uno de los tres videoclubs, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$

Por tanto, $P(A) + P(A) + 0,2 = 1$; $2P(A) = 1 - 0,2$; $2P(A) = 0,8$; $P(A) = 0,4 = P(B)$

Considerando todos los datos del enunciado, el árbol del problema será:



a) $P(A) = 0,4$

b) $P(E) = 0,4 \cdot 0,35 + 0,4 \cdot 0,55 + 0,2 \cdot 0,40 = 0,44$

c) $P\left(\frac{C}{\bar{E}}\right) = \frac{P(C \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{0,2 \cdot 0,60}{1 - P(E)} = \frac{0,12}{1 - 0,44} = \frac{0,12}{0,56} = \frac{3}{14} = 0,2143$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Un comerciante compró 200 kilos de melocotones, 100 de manzanas y 300 de peras. Los vende incrementando un 25% el precio de los melocotones y de las manzanas y un 40% el de las peras. Por la venta de todo el género obtuvo 1087 euros de los que 257 fueron beneficio. Sabiendo que el precio de compra del kilo de melocotones fue 50 céntimos más caro que el del kilo de peras, ¿cuál fue el precio de compra del kilo de cada una de las frutas?

Solución:

Llamando: x = precio de compra del kilo de melocotones
 y = precio de compra del kilo de manzanas
 z = precio de compra del kilo de peras

Del enunciado del problema obtenemos:

		PVP
Los vende incrementado un 25%	melocotones	$1'25 x$
Los vende incrementado un 25%	manzanas	$1'25 y$
Los vende incrementado un 40%	peras	$1'40 z$

Por la venta de todo el género cobra 1087€, $200 \cdot 1'25 x + 100 \cdot 1'25 y + 300 \cdot 1'40 z = 1087$
 $250 x + 125 y + 420 z = 1087$

De 1087€, 257€ es beneficio; por tanto: $1087 - 257 = 830€$ es el coste de la compra,
 $200 x + 100 y + 300 z = 830$, simplificando entre 10
 $20 x + 10 y + 30 z = 83$

El precio de compra del kilo de melocotones fue 50 céntimos más caro que el del kilo de peras: $x = 0'50 + z$;
 $x - z = 0'5$

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} 250x + 125y + 420z = 1087 \\ 20x + 10y + 30z = 83 \\ x - z = 0'5 \end{cases}$$

Lo resolveremos por Gauss. Para facilitar los cálculos escribimos las ecuaciones en orden inverso.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0'5 \\ 20 & 10 & 30 & 83 \\ 250 & 125 & 420 & 1087 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 20 F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0'5 \\ 0 & 10 & 50 & 73 \\ 0 & 125 & 670 & 962 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 12'5 F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0'5 \\ 0 & 10 & 50 & 73 \\ 0 & 0 & 45 & 49'5 \end{array} \right)$$

$$\text{De } F_3 \rightarrow 45 z = 49'5 \rightarrow z = \frac{49'5}{45} = 1'1$$

$$\text{De } F_2 \rightarrow 10 y + 50 z = 73 \rightarrow 10 y + 50 \cdot 1'1 = 73 \rightarrow 10 y + 55 = 73 \rightarrow 10 y = 73 - 55 \rightarrow 10 y = 18 \rightarrow y = \frac{18}{10} = 1'8$$

$$\text{De } F_1 \rightarrow x - z = 0'5 \rightarrow x - 1'1 = 0'5 \rightarrow x = 0'5 + 1'1 = 1'6$$

Solución:

el precio de compra del kilo de melocotones fue de 1'60€, el de manzanas 1'80€ y el de peras 1'10€.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{4-x}$, se pide:

- Su dominio y sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Los máximos y mínimos locales.
- La representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Su dominio y sus puntos de corte con los ejes coordenados.

$$4 - x = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \sim \{4\}$$

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{0}{4-0} = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Puntos de corte:

$$y = 0 \rightarrow 0 = \frac{x^2}{4-x} \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Dom $f(x) = \mathbb{R} \sim \{4\}$ y el punto de corte con los ejes coordenados es: $(0, 0)$.

b) Las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

Asíntota horizontal.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{4-x} &= \left(\frac{\infty}{-\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4-x} &= \left(\frac{\infty}{-\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ no tiene asíntota horizontal}$$

Asíntota vertical.

La posible A.V. es $x = 4$, comprobémoslo:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{4-x} = \frac{4^2}{4-4} = \frac{16}{0} = \infty, \text{ por tanto } x = 4 \text{ es asíntota vertical}$$

Posición de la curva respecto de la asíntota,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2}{4-x} &= \frac{+}{+} \infty = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2}{4-x} &= \frac{+}{-} \infty = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



La asíntota vertical de $f(x)$ es $x = 4$ y no tiene asíntota horizontal.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$. Calculemos $f'(x)$,

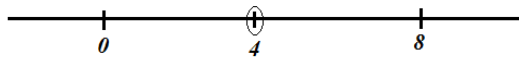
$$f'(x) = \frac{2x(4-x) - x^2(-1)}{(4-x)^2} = \frac{8x - 2x^2 + x^2}{(4-x)^2} = \frac{8x - x^2}{(4-x)^2}$$

Calculamos las raíces del numerador y denominador de $f'(x)$,

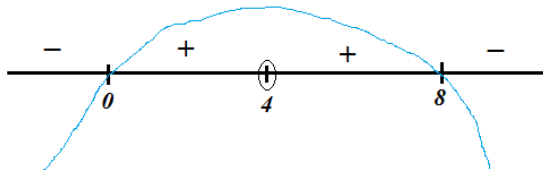
$$8x - x^2 = 0 \rightarrow x(8 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 8 - x = 0 \rightarrow x = 8 \end{cases}$$

$$(4 - x)^2 = 0 \rightarrow 4 - x = 0 \rightarrow x = 4$$

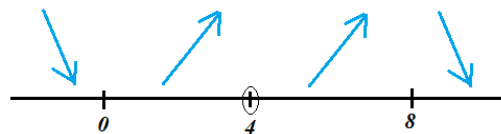
Representamos en la recta real los valores de x obtenidos y consideramos que $x = 4 \notin \text{Dom } f(x)$



En $f'(x)$ el denominador está al cuadrado, siempre es positivo, luego el signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador. El numerador es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo $[\cap]$ y raíces 0 y 8, por tanto,



La monotonía de $f(x)$ es:



Finalmente, $f(x)$ es creciente en $(0, 4) \cup (4, 8)$ y es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$.

d) Los máximos y mínimos locales.

De lo estudiado en el apartado anterior sabemos que hay extremos locales en $x = 0$ (mínimo) y en $x = 8$ (máximo).

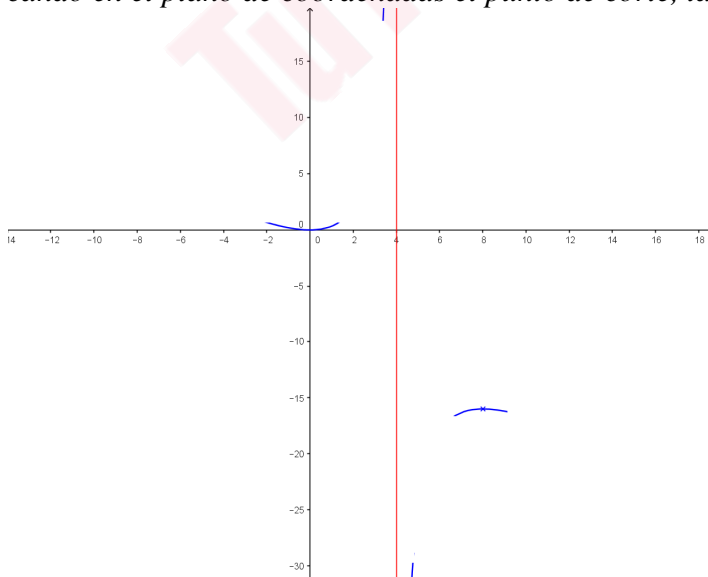
Para $x = 0 \rightarrow y = 0$ (del apartado a))

$$\text{Para } x = 8 \rightarrow y = \frac{8^2}{4 - 8} = \frac{64}{-4} = -16$$

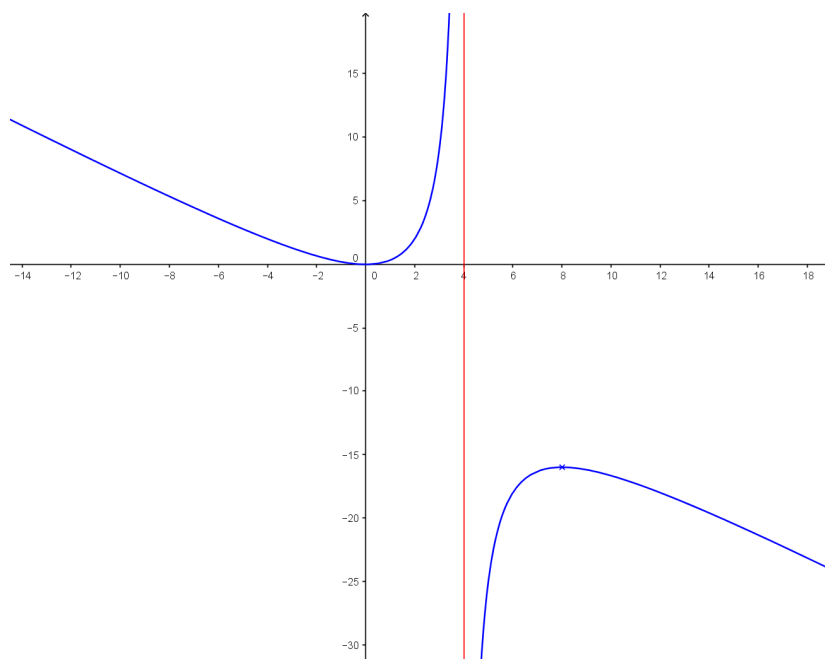
Por tanto, $f(x)$ tiene un mínimo local en $(0, 0)$ y un máximo local en $(8, -16)$.

e) La representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Marcando en el plano de coordenadas el punto de corte, la asíntota y los extremos locales:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento la representación gráfica de $f(x)$ será:



Tu Profec al Rescate

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. El espacio muestral asociado a un experimento aleatorio es el siguiente: $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$. Se conocen las siguientes probabilidades: $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 1/12$, $P(e) = 1/2$ y $P(f) = 1/6$. Dados los sucesos $A = \{a, c, d\}$ y $B = \{c, e, f\}$ relacionados con el experimento aleatorio y siendo $\bar{A}$ el suceso contrario de A , calcula:

- a) $P(A \cup B)$
- b) $P(\bar{A} \cup B)$
- c) $P(A \cap B)$
- d) $P(A/B)$

Solución:

a) $A \cup B = \{a, c, d, e, f\}$

$$\text{Luego, } P(A \cup B) = P(a) + P(c) + P(d) + P(e) + P(f) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$$

b) $\bar{A} = \{b, e, f\}$

$$\bar{A} \cup B = \{b, e, f\} \cup \{c, e, f\} = \{b, c, e, f\}$$

$$P(\bar{A} \cup B) = P(b) + P(c) + P(e) + P(f) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

c) $A \cap B = \{a, c, d\} \cap \{c, e, f\} = \{c\}$

$$P(A \cap B) = P(c) = \frac{1}{12}$$

d) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$\text{Del apartado anterior sabemos que } P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

$$\text{Calculemos } P(B), \quad P(B) = P(c) + P(e) + P(f) = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12}$$

$$\text{Luego, } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/12}{9/12} = \frac{1}{9}$$