

Se determinan los puntos de corte y los signos necesarios antes de calcular áreas.

### Opción A - Ejercicio 1

Escribimos  $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ . Su dominio es  $\mathbb{R}$ , pues es producto de un polinomio y una exponencial. Derivando,

$$f'(x) = -xe^{-x}, \quad f''(x) = (x - 1)e^{-x}.$$

Como  $e^{-x} > 0$ , la segunda derivada cambia de signo en  $x = 1$ ; allí hay un punto de inflexión, con ordenada  $f(1) = 2/e$ . La pendiente de la tangente es  $f'(1) = -1/e$ , así que

$$y - \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(x - 1) \implies \boxed{y = \frac{-x + 3}{e}}.$$

### Opción A - Ejercicio 2

Los cortes se obtienen igualando  $x^3 - 4x = 3x - 6$ :

$$x^3 - 7x + 6 = (x + 3)(x - 1)(x - 2) = 0,$$

por lo que  $x = -3, 1, 2$ . La diferencia entre las gráficas es positiva en  $[-3, 1]$  y negativa en  $[1, 2]$ ; por eso separamos el área en esos dos intervalos:

$$\mathcal{A} = \int_{-3}^1 (x^3 - 7x + 6) dx - \int_1^2 (x^3 - 7x + 6) dx.$$

Con primitiva  $F(x) = x^4/4 - 7x^2/2 + 6x$ ,

$$\mathcal{A} = 32 + \frac{3}{4} = \boxed{\frac{131}{4}}.$$

### Opción A - Ejercicio 3

---

De la primera ecuación,  $x = 1 - y$ ; de la segunda,  $z = -ky$ . Al sustituir ambas expresiones en la tercera queda

$$1 + k(1 - k)y = k + 1.$$

Si  $k = 0$ , la igualdad se cumple para cualquier  $y$ : el sistema es compatible indeterminado, con  $z = 0$  y  $x = 1 - y$ . Si  $k = 1$ , queda  $1 = 2$ , de modo que es incompatible. Para  $k \neq 0, 1$  se obtiene un valor único de  $y$ , por lo que el sistema es compatible determinado. Para imponer  $z = 2$ , usamos  $-ky = 2$  junto con las ecuaciones. La solución es  $k = 2$ ,  $y = -1$ ,  $x = 2$ :

$$k = 2, \quad (x, y, z) = (2, -1, 2).$$

### Opción A - Ejercicio 4

---

Parametrizamos  $r$  como  $(0, t, 3 - 3t)$  y  $s$  como  $(u, 0, 2u - 3)$ . Igualando coordenadas se obtiene  $u = 0$ ,  $t = 0$ , así que el punto de corte es  $P = (0, 0, 3)$ . Los vectores directores son  $\vec{d}_r = (0, 1, -3)$  y  $\vec{d}_s = (1, 0, 2)$ . Su producto vectorial da una normal al plano:

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (2, -3, -1).$$

Al pasar por  $P$  resulta el plano general

$$2x - 3y - z - 3 = 0.$$

### Opción B - Ejercicio 1

---

En  $x = 2$ , para que la función sea continua, los valores de las dos ramas deben coincidir:

$$4 + 2a + b = 2c + 1.$$

La derivabilidad exige además que coincidan las derivadas laterales:  $4 + a = c$ . Finalmente,  $f(0) = f(4)$  da  $b = 4c + 1$ . Resolviendo este sistema de tres condiciones:

$$a = -3, \quad b = 5, \quad c = 1.$$

En el segundo apartado la función es entonces  $x^2 - 3x + 5$  en  $[0, 2]$  y  $x + 1$  en  $(2, 4]$ . Buscamos los puntos críticos de cada rama y comprobamos también los extremos del intervalo. En la primera rama,  $f'(x) = 2x - 3 = 0$  da  $x = 3/2$ , con valor  $11/4$ . Los extremos y el empalme dan valores 5, 3, 5. Por tanto,

$$\min f = \frac{11}{4} \text{ en } x = \frac{3}{2}; \quad \max f = 5 \text{ en } x = 0 \text{ y } x = 4.$$

### Opción B - Ejercicio 2

---

La parábola y la recta se cortan cuando  $x^2 + 4 = 2x + 3$ , es decir, en  $x = 1$ ; ambas pasan entonces por  $(1, 5)$ . La recta queda por debajo de la parábola entre  $x = 0$  y  $x = 1$ . Por ello,

$$\mathcal{A} = \int_0^1 [(x^2 + 4) - (2x + 3)] dx = \int_0^1 (x - 1)^2 dx = \left[ \frac{(x - 1)^3}{3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

### Opción B - Ejercicio 3

De  $AXB = C$ , al multiplicar por  $A^{-1}$  a la izquierda y por  $B^{-1}$  a la derecha, se obtiene  $X = A^{-1}CB^{-1}$ . Las dos matrices son invertibles, y el cálculo por etapas da

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = (A^{-1}C)B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Así,  $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ .

### Opción B - Ejercicio 4

De  $\pi_1$  se tiene  $x = 1 - y$  y de  $\pi_2$ ,  $z = -ay$ . Al sustituir en  $\pi_3$ :

$$1 - y + (1 + a)y + a(-ay) = a + 1 \iff a(1 - a)y = a.$$

Para  $a = 1$  resulta  $0 = 1$ , luego los planos no tienen ningún punto común:  $a = 1$ . Si  $a = 0$ , la tercera ecuación coincide con la primera y la segunda es  $z = 0$ . Queda una recta de puntos comunes:

$$x = 1 - t, \quad y = t, \quad z = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$