

El examen pide responder tres problemas; se desarrollan los seis para ofrecer una solución completa.

Problema 1 · Coste mínimo de fertilizantes

Sean x e y los kilogramos de fertilizante A y B. El nitrógeno aportado debe ser al menos 120 kg y el fósforo al menos 110 kg; por tanto,

$$0,25x + 0,16y \geq 120, \quad 0,15x + 0,40y \geq 110, \quad x, y \geq 0.$$

El coste que queremos minimizar es $C(x, y) = 1,2x + 1,6y$. En un problema lineal el mínimo se alcanza en un vértice de la región factible. Para hallar el cruce de las dos fronteras multiplicamos por 100:

$$25x + 16y = 12000, \quad 15x + 40y = 11000 \implies (x, y) = (400, 125).$$

En el eje x , el mínimo factible es $x = 110/0,15 = 2200/3$ kg, con coste 880 €. En el eje y se requiere $y = 120/0,16 = 750$ kg, con coste 1200 €. En el punto de cruce, el coste es

$$C(400, 125) = 1,2(400) + 1,6(125) = 480 + 200 = 680 \text{ €}.$$

Se necesitan 400 kg de A y 125 kg de B; $C_{\min} = 680 \text{ €}$.

Problema 2 · Estudio de una función racional

La función es $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$. El denominador se anula en $x = \pm 1$, mientras que el numerador no tiene raíces reales (su discriminante es $9 - 40 < 0$). Así,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad f(0) = -5.$$

No hay cortes con el eje X y el corte con Y es $(0, -5)$. Como el numerador vale 10 en $x = -1$ y 4 en $x = 1$, los límites laterales son

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Luego $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. Los grados del numerador y denominador coinciden y sus coeficientes principales están en razón 2, de modo que $y = 2$ es asíntota horizontal en ambos extremos.

Derivamos para determinar la monotonía:

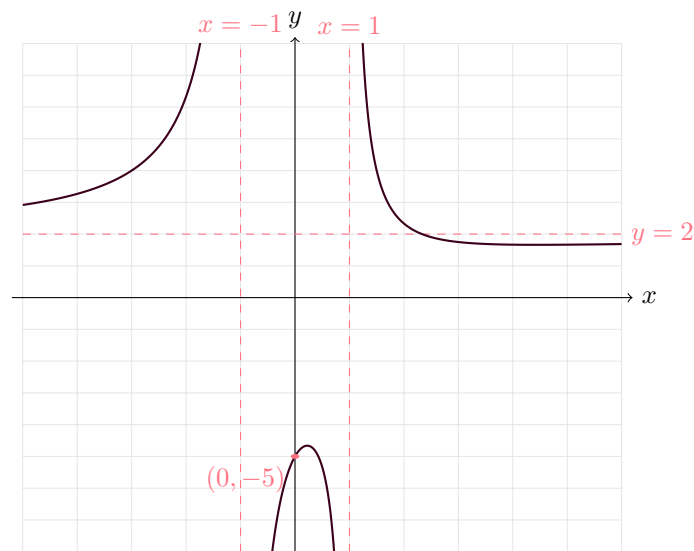
$$f'(x) = \frac{(4x - 3)(x^2 - 1) - 2x(2x^2 - 3x + 5)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^2 - 14x + 3}{(x^2 - 1)^2}.$$

El denominador es positivo en el dominio. El numerador se anula en

$$\alpha = \frac{7 - 2\sqrt{10}}{3}, \quad \beta = \frac{7 + 2\sqrt{10}}{3}.$$

Como la parábola del numerador abre hacia arriba, su signo es positivo fuera de $[\alpha, \beta]$ y negativo entre las raíces. Al separar también los puntos excluidos -1 y 1 , la función crece en $(-\infty, -1)$ y $(-1, \alpha)$, decrece en $(\alpha, 1)$ y $(1, \beta)$, y crece en $(\beta, +\infty)$. Por los cambios de signo, α es máximo local y β mínimo local. Sustituyendo las raíces en f :

$$f(\alpha) = -\frac{3 + 2\sqrt{10}}{2}, \quad f(\beta) = \frac{2\sqrt{10} - 3}{2}.$$



Asíntotas: $x = -1$, $x = 1$, $y = 2$; $\max_{\text{loc}} f = f(\alpha)$, $\min_{\text{loc}} f = f(\beta)$.

Problema 3 · Anticuerpos A y B

Sean A y B los sucesos «ser portador del anticuerpo A» y «ser portador del anticuerpo B». Los datos dan $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B | A) = \frac{2}{5}$ y $P(B^c | A^c) = \frac{4}{5}$, es decir, $P(B | A^c) = \frac{1}{5}$. **a)** Sumamos los casos «portador de A» y «no portador de A»:

$$P(B) = P(A)P(B | A) + P(A^c)P(B | A^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

b) Aplicamos Bayes:

$$P(A | B) = \frac{P(A)P(B | A)}{P(B)} = \frac{(1/2)(2/5)}{3/10} = \frac{2}{3}.$$

c) La probabilidad de no tener ninguno de los dos anticuerpos es $P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$. Como $P(B^c) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$,

$$P(A^c | B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{2/5}{7/10} = \frac{4}{7}.$$

d)

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c | A) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{3}{10}.$$

$$\text{a) } \frac{3}{10}; \quad \text{b) } \frac{2}{3}; \quad \text{c) } \frac{4}{7}; \quad \text{d) } \frac{3}{10}.$$

Problema 4 · Operaciones y ecuación matricial

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) El determinante de A es $4 - 5 = -1 \neq 0$, por lo que tiene inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Para B , $\det B = 4 - 4 = 0$. Al ser cuadrada y tener determinante nulo, no es invertible. **c)** El determinante de un producto es el producto de los determinantes:

$$\det(AB) = \det A \det B = (-1) \cdot 0 = 0,$$

por lo que AB tampoco tiene inversa. **d)** Despejamos X sin cambiar el orden de los factores:

$$AB - AX = BA \implies A(B - X) = BA \implies B - X = A^{-1}BA.$$

Calculamos BA y el producto necesario:

$$BA = \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$X = B - A^{-1}BA = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 5 · Beneficio de un fármaco

El beneficio mensual es $B(x) = -x^2 + 16x - 55$, donde x es el precio de una caja y, por su significado, $x \geq 0$. Completamos el cuadrado para reconocer el máximo:

$$B(x) = -(x - 8)^2 + 9.$$

a) A 6 € por caja se obtiene

$$B(6) = -36 + 96 - 55 = 5 \text{ €}.$$

b) Para que haya beneficio, resolvemos $B(x) > 0$. Las raíces son $x = 5$ y $x = 11$, y la parábola abre hacia abajo; por eso $B(x) > 0$ entre las raíces: $5 < x < 11$ euros. c) La forma de vértice muestra que el máximo se alcanza en $x = 8$ y vale 9 €. d) La derivada es $B'(x) = -2x + 16$. Es positiva para $0 \leq x < 8$ y negativa para $x > 8$; por tanto, el beneficio crece hasta 8 € y decrece a partir de ese precio.

$$B(6) = 5 \text{ €}; \quad B(x) > 0 \text{ si } 5 < x < 11; \quad B_{\max} = 9 \text{ € en } x = 8.$$

Problema 6 · Detección de plagios

Sean D el suceso «el trabajo es un plagio» y C el suceso «el programa lo clasifica como plagio». Se conocen $P(D) = 0,05$, $P(C | D) = 1 - 0,04 = 0,96$ y $P(C | D^c) = 0,02$. a) Los dos casos de procedencia son incompatibles y cubren todos los trabajos:

$$P(C) = P(D)P(C | D) + P(D^c)P(C | D^c) = 0,05(0,96) + 0,95(0,02) = 0,067.$$

b) Si el resultado fue «original», buscamos $P(D | C^c)$. La probabilidad de que sea plagio y el programa no lo detecte es $0,05(0,04) = 0,002$; además $P(C^c) = 1 - 0,067 = 0,933$. Por Bayes,

$$P(D | C^c) = \frac{0,002}{0,933} = \frac{2}{933}.$$

c) La proporción de todos los trabajos que son plagios y se clasifican como tales es

$$P(D \cap C) = P(D)P(C | D) = 0,05(0,96) = 0,048 = 4,8\%.$$

$$P(C) = 6,7\%; \quad P(D | C^c) = \frac{2}{933}; \quad P(D \cap C) = 4,8\%.$$