

Modelo 1 de 2008

Se desarrollan ambas opciones y se justifican los sistemas y las construcciones geométricas.

Opción A - Ejercicio 1

En $(-1, 2)$ ambas funciones toman el valor 2. De $g(-1) = ce^0 = 2$ resulta $c = 2$. Además,

$$f(-1) = 1 - a + b = 2 \implies b - a = 1.$$

La igualdad de las pendientes en ese punto exige $f'(-1) = g'(-1)$:

$$-2 + a = -c = -2 \implies a = 0, \quad b = 1.$$

La pendiente común es -2 , por lo que la tangente por $(-1, 2)$ es

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 2; \quad y = -2x.$$

Opción A - Ejercicio 2

Las curvas se cortan cuando $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x}$, es decir, en $x = 0$ y $x = 1$. En $0 < x < 1$, $x^{1/3} > x^{1/2}$. Por tanto,

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x^{1/3} - x^{1/2}) dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{2}{3}x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Opción A - Ejercicio 3

$$A_{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 5 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \det A_{\lambda} = 3(\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

Si $\lambda \neq 3, -1$, el determinante no se anula y el sistema es compatible determinado. Para $\lambda = -1$, la matriz ampliada se reduce a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Los dos rangos son $2 < 3$, luego es compatible indeterminado y, tomando $z = t$,

$$(x, y, z) = \left(\frac{2t}{3}, -\frac{t}{3}, t \right).$$

Para $\lambda = 3$, la reducción de la ampliada contiene la fila $[0 \ 0 \ 0 \ | \ 1]$: los rangos son distintos y el sistema es incompatible. **Opción A - Ejercicio 4**

Como los vértices son consecutivos, $D = A + C - B = (-4, 5, -4)$. La diagonal tiene vector

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, -2, -3).$$

La recta por B paralela a AC es

$$x = 2 + 2t, \quad y = -1 - 2t, \quad z = 3 - 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para el plano, $\overrightarrow{AB} = (4, -4, 2)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -2, -3)$. Su producto vectorial $(16, 16, 0)$ es normal al plano. Al pasar por $A(-2, 3, 1)$:

$$x + y - 1 = 0.$$

Opción B - Ejercicio 1

El punto de inflexión $(0, 1)$ da $d = 1$ y $f''(0) = 2b = 0$, por lo que $b = 0$. La tangente horizontal en $x = 1$ exige $f'(1) = 3a + c = 0$. La integral fija el último vínculo:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1 = \frac{9}{4}.$$

Además, $f''(1) = -6 < 0$, así que ese punto estacionario es un máximo local. Resolviendo $3a + c = 0$ y $a/4 + c/2 = 5/4$ se obtiene

$$\boxed{a = -1, \quad b = 0, \quad c = 3, \quad d = 1}.$$

Opción B - Ejercicio 2

En $x = e$, el punto de la gráfica es $(e, 1)$ y la pendiente es $g'(e) = 1/e$, así que la tangente es $y = x/e$. La curva corta el eje x en $x = 1$ y la tangente lo corta en 0 ; ambas se tocan en e . El área queda delimitada por la tangente en $[0, 1]$ y por la diferencia entre tangente y logaritmo en $[1, e]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 \frac{x}{e} dx + \int_1^e \left(\frac{x}{e} - \ln x \right) dx \\ &= \int_0^e \frac{x}{e} dx - \int_1^e \ln x dx = \boxed{\frac{e}{2} - 1}. \end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 3

De $AP - B = C^T$ se obtiene $AP = B + C^T$. Como

$$\det A = 1, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

multiplicamos por A^{-1} a la izquierda:

$$P = A^{-1}(B + C^T) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La sustitución directa verifica $AP - B = C^T$. **Opción B - Ejercicio 4**

El vector director de r , obtenido como producto vectorial de los normales $(2, 1, -m)$ y $(1, -1, -1)$, es

$$\vec{d}_r = (-m - 1, 2 - m, -3).$$

El normal de π es $(1, m, -1)$. La recta es paralela al plano cuando el producto escalar se anula:

$$\vec{d}_r \cdot (1, m, -1) = -(m - 2)(m + 1) = 0.$$

Para $m = 2$, la recta es $(x, y, z) = (t, 2, t)$ y el plano da $4 = 1$, así que son paralelos y disjuntos. Para $m = -1$, la recta es $(x, y, z) = (1, t, -t)$ y cumple la ecuación del plano para todo t , luego está contenida. Cuando $m = 0$, la recta es $(x, y, z) = (t, 2 - 2t, 3t - 2)$; al sustituir en el plano se obtiene $t = 1/2$, que da el punto común $(1/2, 1, -1/2)$. Por tanto, es secante. En conclusión,

$m = 2$ da paralelismo disjunto; $m = -1$ da inclusión; $m = 0$ da intersección.