

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

En $x = 0$, la continuidad exige $b = 0$, pues el límite por la derecha de $\ln(1+x)$ es 0 y el valor del primer tramo es $-b$. La derivada del primer tramo en 0 vale $-a$, mientras que la del segundo vale 1. Para que sea derivable, $-a = 1$, luego $a = -1$ y $b = 0$.

En $x = 2$, $f(2) = \ln 3$ y $f'(2) = 1/3$. La tangente es $y - \ln 3 = (x - 2)/3$ y la normal tiene pendiente -3 . Por tanto,

$$y - \ln 3 = \frac{1}{3}(x - 2),$$

$$y - \ln 3 = -3(x - 2).$$

Ejercicio 2

El punto crítico en $x = \pi$ implica $f'(\pi) = -b + 2c = 0$, así que $b = 2c$. La normal dada tiene pendiente $-1/2$, por lo que la tangente en $x = 0$ tiene pendiente 2: $f'(0) = b + 2c = 2$. De aquí $c = 1/2$ y $b = 1$. La recta normal pasa por $(0, f(0)) = (0, a)$; su ordenada en el origen es 3, por lo que $a = 3$. Así, $a = 3, b = 1, c = 1/2$.

Ejercicio 3

El dominio es $x > 0$. Como $f'(x) = 2 \ln x/x$, la función decrece en $(0, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$; tiene mínimo en $(1, 0)$. En $[1, e]$ es no negativa, así que el área pedida es la integral directa:

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = [x((\ln x)^2 - 2 \ln x + 2)]_1^e = e - 2.$$

Ejercicio 4

Con $t = e^{x/2}$, tenemos $dx = 2dt/t$; cuando $x = 0$, $t = 1$, y cuando $x = 2$, $t = e$. Por tanto,

$$\int_0^2 \frac{dx}{1 + \sqrt{e^x}} = 2 \int_1^e \frac{dt}{t(1+t)} = 2[\ln t - \ln(1+t)]_1^e = 2 \ln \left(\frac{2e}{e+1} \right).$$

Ejercicio 5

Al sumar la primera y segunda ecuaciones se obtiene $4x = 0$, así que $x = 0$. Las dos primeras dan $y = -2z$. La tercera queda $(m - 4)z = 0$. Para que existan infinitas soluciones, necesitamos $m = 4$; entonces $z = t$ y $y = -2t$. Las soluciones son $\boxed{(0, -2t, t), t \in \mathbb{R}}$.

Para $m = 2$, la misma reducción obliga a $z = 0$. Por tanto, no existe solución con $z = 1$.

Ejercicio 6

Para matrices 3×3 , $\det(\frac{1}{3}A^{-1}A^t) = (1/3)^3 \det(A^{-1}) \det(A^t)$. Como $\det A = 2$, resulta $\boxed{1/27}$.

En el primer determinante, el desarrollo da $-6 \det A$, de modo que vale $\boxed{-12}$. Para el segundo, si C_1, C_2, C_3 son las columnas de A , las columnas de la matriz son $2(C_1 - C_2), C_3, C_2$. Sacamos el factor 2 y permutamos las dos últimas columnas, lo que cambia el signo: el determinante vale $-2 \det A = \boxed{-4}$.

Ejercicio 7

Las rectas tienen el mismo vector director $(1, 2, 1)$, así que son paralelas. Un punto de r es $P = (0, -2, 1)$ y uno de s es $Q = (-3, -5, 0)$. La distancia entre ellas es

$$d = \frac{|(Q - P) \times (1, 2, 1)|}{|(1, 2, 1)|} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Si dos lados del cuadrado están sobre estas rectas paralelas, la distancia entre ellas es la longitud del lado. El área vale $d^2 = \boxed{7/3}$.

Ejercicio 8

Un punto de r es $(1, 1, 2)$ y su director es $(1, 1, m)$. Un director de s , intersección de planos con normales $(1, -1, 2)$ y $(1, 0, 1)$, es $(-1, 1, 1)$. Al sustituir un punto genérico de r en los planos de s , las ecuaciones exigen $2mt = -1$ y $(1 + m)t = -1$. Son compatibles exactamente cuando $m = 1$; entonces $t = -1/2$ y el punto de corte es $(1/2, 1/2, 3/2)$. Para $m \neq 1$, las rectas no se cortan; tampoco son paralelas porque sus directores no son proporcionales, así que son alabeadas.

Cuando $m = 1$, los directores $(1, 1, 1)$ y $(-1, 1, 1)$ tienen producto escalar 1 y ambos módulo $\sqrt{3}$. El coseno del ángulo entre las rectas es $\boxed{1/3}$.