

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria ordinaria de 2026

Se desarrollan todas las alternativas del examen. En la prueba basta con contestar a las opciones que se elijan.

Pregunta 1 - Rango y ecuación matricial

La matriz depende del parámetro real λ . Para discutir su rango, calculamos primero el determinante: si es distinto de cero, el rango es 3; si se anula, estudiamos menores de orden 2.

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A_\lambda = 1 + (\lambda - 2)(\lambda - 1) - \lambda = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

El determinante solo se anula para $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$. Para cualquier otro valor, A_λ tiene rango 3. Si $\lambda = 1$ o $\lambda = 3$, el menor formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas vale

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda - 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Así, el rango es al menos 2; como el determinante de orden 3 es cero, no puede ser 3.

Conclusión. $\text{rg}(A_\lambda) = 2$ si $\lambda = 1$ o $\lambda = 3$; $\text{rg}(A_\lambda) = 3$ para los demás valores reales de λ .

b) Ecuación matricial cuando el parámetro vale 2

Al sustituir $\lambda = 2$ obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = (2 - 1)(2 - 3) = -1 \neq 0,$$

por lo que A es invertible. Factorizamos el lado izquierdo y multiplicamos por A^{-1} por la izquierda:

$$A^2 - AX = I \iff A(A - X) = I \iff A - X = A^{-1} \iff X = A - A^{-1}.$$

Para hallar la inversa reducimos la matriz ampliada. Restamos la fila 1 a la fila 3, cambiamos el signo de la nueva fila 3 y, después, restamos dos veces esa fila a la fila 1 y una vez a la fila 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_3 \leftarrow F_3 - F_1 \\ F_3 \leftarrow -F_3 \\ F_1 \leftarrow F_1 - 2F_3 \\ F_2 \leftarrow F_2 - F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos sustituyendo $X = A - A^{-1}$:

$$A^2 - AX = A^2 - A(A - A^{-1}) = A^2 - A^2 + I = I.$$

Conclusión. La matriz solución es $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pregunta 2 - Optimización del coste

Situamos el ángulo recto en el origen y tomamos los catetos sobre los ejes. Sea x la dimensión del rectángulo paralela al cateto de 56 m e y la paralela al de 42 m. El vértice opuesto está en la hipotenusa, cuya ecuación en estos ejes es

$$\frac{x}{56} + \frac{y}{42} = 1, \quad y = 42 - \frac{3}{4}x.$$

Las dimensiones han de ser no negativas, así que $0 \leq x \leq 56$. El área del jardín triangular es

$$S_{\text{jardín}} = \frac{42 \cdot 56}{2} = 1176 \text{ m}^2.$$

El suelo cubierto cuesta 30 €/m² y el no cubierto 50 €/m². Si el área techada es xy , el coste total es

$$C = 30xy + 50(1176 - xy) = 58800 - 20xy.$$

Como el área techada se resta en la expresión del coste, minimizar C equivale a maximizar xy . Sustituimos y por la expresión de la hipotenusa:

$$S(x) = xy = x \left(42 - \frac{3}{4}x \right) = 42x - \frac{3}{4}x^2, \quad 0 \leq x \leq 56.$$

Los extremos interiores se buscan anulando la derivada; además, comprobamos que el punto crítico da un máximo:

$$S'(x) = 42 - \frac{3}{2}x = 0 \implies x = 28, \quad S''(x) = -\frac{3}{2} < 0.$$

La otra dimensión es

$$y = 42 - \frac{3}{4} \cdot 28 = 21 \text{ m}.$$

La superficie techada máxima es $28 \cdot 21 = 588 \text{ m}^2$. Por ello, el coste mínimo resulta

$$C_{\text{mín}} = 30 \cdot 588 + 50(1176 - 588) = 47040 \text{ €}.$$

Conclusión. Las dimensiones que minimizan el coste son 28 m por 21 m, y el coste mínimo es 47 040 €.

Pregunta 3 - Simetría, distancia y planos

Escribimos la recta en forma paramétrica. De su ecuación simétrica obtenemos el punto $R_0 = (2, 0, 0)$ y el vector director $\vec{u} = (1, 1, 4)$:

$$r: \quad x = 2 + t, \quad y = t, \quad z = 4t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Simétrico de P respecto del plano π

El vector normal de $\pi: 2x + 2y - z - 13 = 0$ es $\vec{n} = (2, 2, -1)$. Para reflejar P , hallamos primero su proyección ortogonal H sobre el plano. Si $F(x, y, z) = 2x + 2y - z - 13$, la fórmula del pie de la perpendicular es $H = P - \frac{F(P)}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$:

$$F(P) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 0 - 13 = -9, \quad \|\vec{n}\|^2 = 2^2 + 2^2 + (-1)^2 = 9,$$

$$H = (2, 0, 0) - \frac{-9}{9}(2, 2, -1) = (4, 2, -1).$$

H es el punto medio entre P y su simétrico P' . Por tanto,

$$P' = 2H - P = 2(4, 2, -1) - (2, 0, 0) = (6, 4, -2).$$

Conclusión. El punto simétrico de P es $P' = (6, 4, -2)$.

b1) Distancia entre r y π

Comprobamos si la recta es paralela al plano con el producto escalar del vector director y el normal:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (1, 1, 4) \cdot (2, 2, -1) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

La recta es paralela a π . Como $R_0 = (2, 0, 0)$ no pertenece al plano ($2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 0 = 4 \neq 13$), la distancia entre ambos objetos es la distancia de R_0 al plano. Para $ax + by + cz + d = 0$, la distancia de $Q = (x_0, y_0, z_0)$ es

$$d(Q, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Aplicamos la fórmula:

$$d(r, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 0 - 13|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Conclusión. La distancia entre la recta r y el plano π es 3 unidades.

b2) Plano que contiene a r y es ortogonal a π

El plano buscado debe tener un vector normal $\vec{m}$ perpendicular a $\vec{u}$, porque contiene la dirección de r . Además, al ser ortogonal a π , $\vec{m}$ debe ser perpendicular a $\vec{n}$. El producto vectorial $\vec{n} \times \vec{u}$ proporciona un vector perpendicular a ambos:

$$\vec{n} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (9, -9, 0), \quad \vec{m} = (1, -1, 0).$$

Usamos el punto $R_0 = (2, 0, 0)$ y el vector normal $\vec{m}$. En forma general,

$$\vec{m} \cdot ((x, y, z) - (2, 0, 0)) = 0 \implies x - y - 2 = 0.$$

Conclusión. Una ecuación del plano solicitado es $x - y - 2 = 0$.

Pregunta 4 - Probabilidad

4.1 a) Probabilidad de que una batería sea defectuosa

Sea T la duración de una batería. Sabemos que $T \sim \mathcal{N}(24, 3)$, con media 24 h y desviación típica 3 h. Tipificamos para utilizar la tabla de la normal estándar $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$P(T < 21) = P\left(\frac{T - 24}{3} < \frac{21 - 24}{3}\right) = P(Z < -1).$$

La tabla da $P(Z < 1) = 0,8413$. Por simetría, $P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1)$:

$$P(T < 21) = 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

Conclusión. La probabilidad de que una batería se considere defectuosa es 0,1587, es decir, un 15,87 %.

4.1 b) Al menos 9 baterías no defectuosas en un lote de 10

Consideramos éxito que un teléfono tenga una batería no defectuosa. Su probabilidad es $p = 1 - 0,1587 = 0,8413$. Por la independencia entre teléfonos, el número X de baterías no defectuosas sigue una binomial:

$$X \sim B(10, 0,8413), \quad P(X = k) = \binom{10}{k} (0,8413)^k (0,1587)^{10-k}.$$

«Al menos 9» significa $X \geq 9$; sumamos los casos $X = 9$ y $X = 10$:

$$\begin{aligned} P(X \geq 9) &= P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= \binom{10}{9} (0,8413)^9 (0,1587) + (0,8413)^{10} \\ &\approx 0,5127. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad es aproximadamente 0,5127 (51,27 %).

4.2 a) Cálculo de $P(\bar{A})$ y $P(A \cap B)$

El enunciado da $P(B) = 0,4$ y $P(\overline{A \cup B}) = 0,4$. Por el suceso complementario, $P(A \cup B) = 1 - 0,4 = 0,6$. Sean $p = P(A)$ e $i = P(A \cap B)$. Aplicamos la fórmula de la unión y la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad P(B | A) = \frac{i}{p} = 0,2.$$

De la segunda igualdad, $i = 0,2p$. Al sustituir en la primera,

$$p + 0,4 - 0,2p = 0,6 \implies 0,8p = 0,2 \implies p = 0,25, \quad i = 0,05.$$

Por tanto,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Conclusión. $P(\bar{A}) = 0,75$ y $P(A \cap B) = 0,05$.

4.2 b) Probabilidad condicionada a $A \cup B$

Usamos $P(E | F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$. Como $A \cap B$ está contenido en $A \cup B$, el numerador es $P(A \cap B)$:

$$P((A \cap B) | (A \cup B)) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0,05}{0,6} = \frac{1}{12} \approx 0,0833.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es $\frac{1}{12}$, aproximadamente 0,0833.

Pregunta 5 - Integrales y funciones a trozos

5.1 Área limitada por $\ln(x)$, el eje de abscisas y $x = e$

El dominio de $\ln(x)$ es $x > 0$. La curva corta el eje de abscisas cuando $\ln(x) = 0$, es decir, en $x = 1$; además, $\ln(x) \geq 0$ entre 1 y e . El área es, por tanto, la integral de $\ln(x)$ en $[1, e]$. Para hallar una primitiva usamos integración por partes, con $u = \ln(x)$ y $dv = dx$:

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C.$$

Evaluamos en los extremos:

$$\text{Área} = \int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1.$$

Conclusión. El área de la región es 1 unidad cuadrada.

5.2 a) Continuidad y derivabilidad en $x = 0$

La primera rama combina un polinomio y un seno. En la segunda, $1 + x^2 > 0$ para todo x ; por tanto, la función está definida en $\mathbb{R}$. Estudiamos primero la continuidad en el punto de unión. El valor en 0 procede de la rama $x \geq 0$:

$$f(0) = \frac{2e^0}{1+0^2} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b.$$

La continuidad exige que coincidan el límite por la izquierda y el valor de la función, así que $b = 2$. Una vez asegurada la continuidad, igualamos las derivadas laterales. Para $x < 0$,

$$f'_-(x) = 6x - a \cos(ax), \quad f'_-(0) = -a.$$

Para $x \geq 0$, aplicamos la regla del cociente:

$$f'_+(x) = \frac{2e^x(1+x^2) - 4xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{2e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}, \quad f'_+(0) = 2.$$

La igualdad de derivadas laterales da $-a = 2$, luego $a = -2$. **Conclusión.** La función es continua y derivable en $x = 0$ cuando $a = -2$ y $b = 2$.

5.2 b) Recta tangente en $x = 2$

Como $2 \geq 0$, utilizamos $g(x) = \frac{2e^x}{1+x^2}$. La recta tangente en $x = x_0$ tiene ecuación $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$. Calculamos el punto y la pendiente:

$$g(2) = \frac{2e^2}{5}, \quad g'(2) = \frac{2e^2(2-1)^2}{5^2} = \frac{2e^2}{25}.$$

Sustituimos en la fórmula de la tangente y despejamos y :

$$y - \frac{2e^2}{5} = \frac{2e^2}{25}(x - 2) \implies y = \frac{2e^2}{25}x + \frac{6e^2}{25}.$$

Conclusión. La recta tangente en el punto de abscisa 2 es $y = \frac{2e^2}{25}x + \frac{6e^2}{25}$.