

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z = \lambda \\ \lambda x + 2y - 3 = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - 2z = 6 \end{cases}$$

con λ parámetro real, se pide:

- Determinar razonadamente para qué valores de λ es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. (1,3 puntos)
- Hallar el conjunto de las soluciones del sistema para el caso compatible determinado. (1 punto)
- Hallar el conjunto de las soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado. (1 punto)

Solución:

a) La matriz ampliada de este sistema es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Tanto la matriz de coeficientes (A) como la ampliada A' tienen como rango máximo 3; empezamos estudiando el rango de A.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = -4 + \lambda^2 + 2 - 4 + \lambda - 2\lambda = \lambda^2 - \lambda - 6$$

Veamos para que valores del parámetro el determinante es nulo, resolvemos la ecuación

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \lambda_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Para $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq -2$ hay un menor de orden 3 no nulo,
 luego $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas
 Sistema compatible determinado

Para $\lambda = 3$ el menor de orden 3 de A es nulo, el rango de A será como máximo 2, estudiemos los rangos de A y A'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Estudiemos el siguiente menor de A} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0 \quad \text{luego } \text{rang}(A)=2 \text{ y el } \text{rang}(A') \text{ será al menos 2.}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{En esta matriz se observa que } F_2 - F_3 = F_1 \text{ por lo que } \text{rang}(A') = 2$$

luego $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2 < n^\circ$ de incógnitas
 Sistema compatible indeterminado

Para $\lambda = -2$ igual que en el caso anterior el menor de orden 3 de A es nulo. Estudiemos los rangos de A y A' .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Estudiemos el siguiente menor de A} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

luego
 $\text{rang}(A)=2$
 y el
 $\text{rang}(A')$
 será al
 menos 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{orlando el} \\ \text{menor} \\ \text{anterior} \\ \text{con la 4}^a \\ \text{columna y} \\ \text{3}^a \text{ fila} \end{array} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 8 - 12 - 4 - 12 + 12 = -30 \neq 0 \quad \begin{array}{l} \text{luego} \\ \text{rang}(A') = 3 \end{array}$$

luego $\text{rang}(A)=2$ y $\text{rang}(A')=3$, es decir $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A')$
Sistema incompatible

En resumen, para $\lambda = -2$ Sistema Incompatible,
para $\lambda = 3$ Sistema Compatible Indeterminado,
para $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq -2$ Sistema Compatible Determinado.

b) Para $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq -2$ Sistema Compatible Determinado.

Lo resolvemos por Cramer, $|A|$ ya lo calculamos en el apartado a) $|A| = \lambda^2 - \lambda - 6$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 3\lambda & 2 & -1 \\ 6 & \lambda & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4\lambda + 3\lambda^2 + 6 - 12 + \lambda^2 - 6\lambda}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{4\lambda^2 - 10\lambda - 6}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{(\lambda - 3)(4\lambda + 2)}{(\lambda - 3)(\lambda + 2)} = \frac{4\lambda + 2}{\lambda + 2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 3\lambda & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6\lambda + 6\lambda - 2\lambda - 6\lambda + 6 + 2\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{2\lambda^2 - 8\lambda + 6}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{(\lambda - 3)(2\lambda - 2)}{(\lambda - 3)(\lambda + 2)} = \frac{2\lambda - 2}{\lambda + 2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 2 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{12 + \lambda^3 - 6\lambda - 4\lambda - 3\lambda^2 + 6\lambda}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{(\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda + 2)}{(\lambda - 3)(\lambda + 2)} = \lambda - 2$$

En los cálculos anteriores como $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq -2$ podemos simplificar por $\lambda - 3$ y $\lambda + 2$

Para $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq -2$ la solución del sistema es $x = \frac{4\lambda + 2}{\lambda + 2}$ $y = \frac{2\lambda - 2}{\lambda + 2}$ $z = \lambda - 2$

c) Para $\lambda = 3$ Sistema Compatible Indeterminado.

Para este valor de λ , del menor de orden 2 no nulo obtenido en el apartado a) escogemos las ecuaciones e incógnitas principales, es decir, tomamos la 1ª y 2ª ecuación:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ 3x + 2y - z &= 9 \end{aligned}$$

las incógnitas principales son x e y , pasamos z al término independiente y el sistema a resolver es,

$\begin{cases} x - y = 3 - z \\ 3x + 2y = 9 + z \end{cases}$ el determinante de la matriz de coeficientes es 5, calculado en el apartado a), obtenemos las soluciones por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - z & -1 \\ 9 + z & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{6 - 2z + 9 + z}{5} = \frac{15 - z}{5} = 3 - \frac{z}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - z \\ 3 & 9 + z \end{vmatrix}}{5} = \frac{9 + z - 9 + 3z}{5} = \frac{4z}{5}$$

$$\text{Solución} \quad \begin{cases} x = 3 - \frac{\mu}{5} \\ y = \frac{4\mu}{5} \\ z = \mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Dados los planos $\pi_1 : x + y + z = -5$, $\pi_2 : x - 3y - z = 3$ y la recta $r : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$,

se pide:

- Determinar razonadamente la posición relativa de la recta r y la recta s intersección de los planos π_1 y π_2 . (1,7 puntos)
- Obtener razonadamente la ecuación del plano que contiene a la recta s anterior y es paralelo a r . (1,6 puntos)

Solución:

a)

La recta s es de ecuación $\begin{cases} x + y + z = -5 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases}$, calculemos su forma paramétrica. Considerando el menor formado por las incógnitas x y z

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \quad \text{resolvemos el sistema despejando la incógnita } y.$$

$$\begin{cases} x + z = -5 + y \\ x - z = 3 + 3y \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $2x = -2 + 2y \rightarrow x = -1 + y$

sustituyendo en la 1ª ecuación: $-1 + y + z = -5 - y$; despejando z , $z = -4 - 2y$

La ecuación de la recta s será $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -4 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$ y de ella conocemos $P_s(-1, 0, -4)$ y $\vec{v}_s(1, 1, -2)$

la ecuación de la recta r es $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ y de ella conocemos $P_r(2, 1, 0)$ y $\vec{v}_r(2, 3, 2)$

Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s hay que estudiar el rango de la matriz

$$M' = (\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \quad P_r - P_s) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 18 + 2 - 6 + 4 - 12 = 14 - 36 = -22 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(M') = 3$$

Por lo tanto las rectas r y s se cruzan.

b) Ecuación del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r . El plano que buscamos lo podemos calcular de dos formas diferentes.

1ª forma.

De la recta s , como calculamos en el apartado anterior, conocemos un punto y un vector director; el plano buscado, π , contiene a la recta s luego P_s y $\vec{v}_s$ serán un punto y un vector director de π . Como π debe ser paralelo a la recta r el otro vector director de π será el de r .

Del plano π conocemos $P_s(-1, 0, -4)$ y $\vec{v}_s(1, 1, -2)$ su ecuación será $\begin{cases} x = -1 + \lambda + 2\mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -4 - 2\lambda + 2\mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Calculemos la ecuación general del plano,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ 1 & 3 & y \\ -2 & 2 & z+4 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la última columna,

$$(x+1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (z+4) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Solución} \quad \pi : 8x - 6y + z + 12 = 0$$

$$(x+1)(2+6) - y(2+4) + (z+4)(3-2) = 0$$

$$8x + 8 - 6y + z + 4 = 0$$

$$8x - 6y + z + 12 = 0$$

2ª forma.

El haz de planos que contienen la recta s es

$$(x + y + z + 5) + \lambda (x - 3y - z - 3) = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Efectuando operaciones,

$$(1 + \lambda)x + (1 - 3\lambda)y + (1 - \lambda)z + 5 - 3\lambda = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

El plano π que buscamos será uno de los anteriores.

El vector ortogonal al plano anterior es $\vec{v}_n(1 + \lambda, 1 - 3\lambda, 1 - \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Como el plano π debe ser paralelo a la recta r , se cumplirá que $\vec{v}_n \perp \vec{v}_r \rightarrow \vec{v}_n \cdot \vec{v}_r = 0$

$$(1 + \lambda, 1 - 3\lambda, 1 - \lambda) \cdot (2, 3, 2) = 0$$

$$2 + 2\lambda + 3 - 9\lambda + 2 - 2\lambda = 0$$

$$7 - 9\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{7}{9}$$

La ecuación del plano buscado será:

$$(x + y + z + 5) + \frac{7}{9}(x - 3y - z - 3) = 0$$

$$9(x + y + z + 5) + 7(x - 3y - z - 3) = 0$$

$$9x + 9y + 9z + 45 + 7x - 21y - 7z - 21 = 0 \quad \text{Solución} \quad \pi : 8x - 6y + z + 12 = 0$$

$$16x - 12y + 2z + 24 = 0$$

$$8x - 6y + z + 12 = 0$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Encontrar razonadamente el punto de la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ en el que la recta tangente a la curva tiene pendiente máxima y calcular el valor de esta pendiente. (3,3 puntos)

Solución:

La pendiente de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ en cualquier punto de ella se obtiene calculando y'

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Sea $m = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, queremos que sea máxima, debe ser $m' = 0$ y $m'' < 0$.

Calculemos m' y m''

$$m' = \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$m'' = \frac{12x(1+x^2)^3 - (6x^2 - 2)3(1+x^2)^2 2x}{(1+x^2)^6} = \frac{12x(1+x^2) - (6x^2 - 2)6x}{(1+x^2)^4} = \frac{12x + 12x^3 - 36x^3 + 12x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-24x^3 + 24x}{(1+x^2)^4} = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$m' = 0 \rightarrow \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} = 0 \rightarrow 6x^2 - 2 = 0 \rightarrow 6x^2 = 2 \rightarrow x^2 = \frac{2}{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Para } x = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow m'' = \frac{24 \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)}{\left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)^4} = \frac{24 \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \right)}{\left(1 + \frac{1}{3} \right)^4} = \frac{\frac{24}{\sqrt{3}} \frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{3} \right)^4} > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

$$\text{Para } x = \frac{-1}{\sqrt{3}} \rightarrow m'' = \frac{24 \frac{-1}{\sqrt{3}} \left(1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)}{\left(1 + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)^4} = \frac{24 \frac{-1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \right)}{\left(1 + \frac{1}{3} \right)^4} = \frac{\frac{-24}{\sqrt{3}} \frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{3} \right)^4} < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$

$$\text{Para } x = \frac{-1}{\sqrt{3}} \rightarrow y = \frac{1}{1 + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$m = \frac{-2 \frac{-1}{\sqrt{3}}}{\left(1 + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(1 + \frac{1}{3} \right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{4}{3} \right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{16}{9}} = \frac{18}{16\sqrt{3}} = \frac{9}{8\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{8 \cdot 3} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

En conclusión, el punto de curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ en que la recta tangente a ella tiene pendiente máxima es

$\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$ y esta pendiente es $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Tu Profe al Rescate

EJERCICIO A

PROBLEMA 4.1. En un plano, el trazado de una carretera discurre según la ecuación $y = \frac{x^2}{4} - x$, siendo un río el eje OX. En el terreno entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos las distancias en kilómetros, ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60 euros?

Solución:

Como $y = \frac{x^2}{4} - x$, es una parábola, hacemos una representación gráfica aproximada.

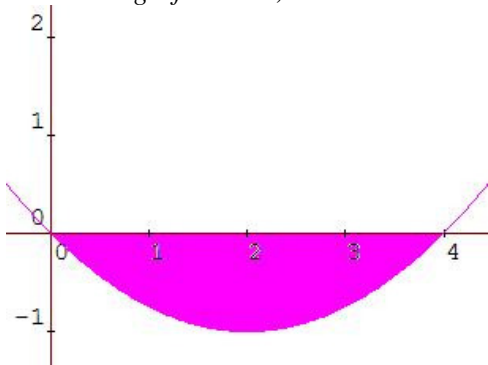
Calculamos los puntos de corte con el eje OX

$$\frac{x^2}{4} - x = 0$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

La representación gráfica será,



El terreno en que está el pinar será la zona sombreada del gráfico. Calculemos el área del pinar, como las distancias están en Km, las unidades del área son Km^2 ,

$$A = \left| \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - x \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 \right| = \left| \frac{4^3}{12} - \frac{4^2}{2} \right| = \left| \frac{64}{12} - \frac{16}{2} \right| = \left| \frac{16}{3} - 8 \right| = \left| \frac{16-24}{3} \right| = \left| \frac{-8}{3} \right| = \frac{8}{3} Km^2$$

Expresemos el área del pinar en hectáreas. $1 \text{ área} = 1 dam^2$, $1 \text{ hectárea} = 100 \text{ áreas} = 100 dam^2$.

$$\frac{8}{3} Km^2 = \frac{8}{3} 10000 dam^2 = \frac{8}{3} 100 ha = \frac{800}{3} ha$$

$$Valor = \frac{800}{3} 60 = 16000 \text{ euros}$$

Solución: el pinar vale 16000 €.

EJERCICIO A

PROBLEMA 4.2. La media de las calificaciones globales obtenidas por 10 alumnos fue 6,8 puntos y sus horas de estudio totales sumaron 120. Si x representa las horas de estudio de cada estudiante e y su calificación, el coeficiente de correlación entre x e y es 0,8. Sabiendo que la desviación típica de x coincide con la de y , explicar, razonadamente, cómo se obtiene la recta de regresión de y sobre x (2 puntos) y calcularla (1,3 puntos).

Solución:

La recta de regresión de y sobre x es $y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$ x : horas de estudio
 y : calificación

De los datos del problema $\bar{y} = 6,8$ $\bar{x} = \frac{120}{10} = 12$ $\rho = 0,8$ $\sigma_x = \sigma_y$

El coeficiente de correlación se calcula mediante la expresión:

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \text{ como } \sigma_x = \sigma_y \rightarrow \rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = 0,8$$

Por lo tanto la recta de regresión será: $y - 6,8 = 0,8 (x - 12)$

Tu Profite al Rescate

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Determina el valor real de x para que se cumpla la siguiente propiedad:

el determinante de la matriz $2B$ es 160, siendo $B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 2 \end{pmatrix}$ (3,3 puntos).

Solución:

En la matriz $2B$ todos los elementos de la matriz B están multiplicados por 2, es decir, cada uno de los elementos de las filas (o columnas) de la matriz B está multiplicado por 2. B es una matriz 3×3 , por la propiedad de los determinantes que nos dice que si multiplicamos los elementos de una fila (o columna) de una matriz por un número el determinante de esa matriz queda multiplicado por ese número obtenemos:

$$|2B| = 2 \cdot 2 \cdot 2 |B| = 8 |B|$$

Calculemos el determinante de B ,

$$|B| = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{ll} \text{desarrollando} & = 8x + (x+1)(2-x^2) + 6x - 4x - 2x(2-x^2) - 6(x+1) = \\ \text{por la regla} & = 8x + 2x + 2 - x^3 - x^2 + 6x - 4x - 4x + 2x^3 - 6x - 6 = \\ \text{de Sarrus} & = x^3 - x^2 + 2x - 4 \end{array}$$

Por lo tanto, $|2B| = 8(x^3 - x^2 + 2x - 4)$ La ecuación a resolver será $8(x^3 - x^2 + 2x - 4) = 160$,

$$x^3 - x^2 + 2x - 4 = 20$$

$x^3 - x^2 + 2x - 24 = 0$, buscamos sus raíces por Ruffini,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 2 & -24 \\ 3 & & 3 & 6 & 24 \\ \hline & 1 & 2 & 8 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 3 \text{ es una solución,} \\ \text{resolvemos la ecuación} \\ x^2 + 2x + 8 = 0 \end{array} \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-28}}{2} \quad \text{que no tiene} \\ \text{soluciones reales.}$$

Por lo tanto, el valor real de x que cumple la propiedad del enunciado es 3.

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Se consideran la recta $r: (x, y, z) = (t + 1, 2t, 3t)$, el plano $\pi: x - 2y - z = 0$ y el punto $P = (1, 1, 1)$. Se pide

- Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo al plano π (0,9 puntos).
- Determinar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P (1,2 puntos).
- Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos anteriores, π_1 y π_2 (1,2 puntos).

Solución:

a) Como el plano π_1 debe ser paralelo a $\pi \Rightarrow \pi_1: x - 2y - z + D = 0$

Como $P \in \pi_1 \Rightarrow 1 - 2 \cdot 1 - 1 + D = 0; -2 + D = 0; D = 2$; luego $\pi_1: x - 2y - z + 2 = 0$

b) De la recta r conocemos: Punto $P_r(1,0,0)$ y vector director $\vec{v}_r(1,2,3)$. Obtenemos el vector $\vec{PP}_r(0,1,1)$ que será director de π_2

Del plano π_2 conocemos: un punto $P(1,1,1)$ y los vectores directores $\vec{v}_r$ y $\vec{PP}_r$

La ecuación general de este plano será,

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 2 & 1 \\ z-1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{desarrollando por la primera columna,} \quad (x-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(-1) - (y-1)1 + (z-1)1 = 0$$

$$-x + 1 - y + 1 + z - 1 = 0$$

$$-x - y + z + 1 = 0$$

$$x + y - z - 1 = 0$$

Solución $\pi_2: x + y - z - 1 = 0$

c) La recta intersección de π_1 y π_2 será $r_2 \begin{cases} x - 2y - z + 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Para encontrar las ecuaciones paramétricas de esta recta resolvemos el sistema anterior,

como el $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$ podemos considerar como incógnitas principales x e y . El sistema a resolver es,

$$\begin{cases} x - 2y = z - 2 \\ x + y = z + 1 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\begin{vmatrix} z-2 & -2 \\ z+1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{z-2+2z+2}{3} = \frac{3z}{3} = z \\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z-2 \\ 1 & z+1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{z+1-z+2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de esta recta son: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Hallar todos los valores reales z tales que $\int_0^z \frac{-16}{x^2 - 2x - 15} dx = \ln 25$ (3,3 puntos).

Solución:

Estudiamos la continuidad de la función integrando, $y = \frac{-16}{x^2 - 2x - 15}$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Luego $y = \frac{-16}{x^2 - 2x - 15}$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 5\}$

En primer lugar calculamos la integral indefinida, descomponemos el integrando en suma de dos fracciones

$$\frac{-16}{x^2 - 2x - 15} = \frac{-16}{(x-5)(x+3)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-5)}{(x-5)(x+3)}$$

$$-16 = A(x+3) + B(x-5)$$

$$-16 = (A+B)x + (3A-5B) \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-5B=-16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5A+5B=0 \\ 3A-5B=-16 \end{cases} \rightarrow 8A=-16 \rightarrow A=-2$$

sustituyendo en 1ª ecuación $-2+B=0 \rightarrow B=2$

$$\int \frac{-16}{x^2 - 2x - 15} dx = \int \left(\frac{-2}{x-5} + \frac{2}{x+3} \right) dx = \int \frac{-2}{x-5} dx + \int \frac{2}{x+3} dx = -2 \ln |x-5| + 2 \ln |x+3| + C =$$

$$= \ln (x+3)^2 - \ln (x-5)^2 + C = \ln \left(\frac{x+3}{x-5} \right)^2 + C$$

Calculemos ahora la integral definida, el cálculo que realizaremos es válido cuando la función integrando es continua en el intervalo $[0, z]$.

$$\int_0^z \frac{-16}{x^2 - 2x - 15} dx = \left[\ln \left(\frac{x+3}{x-5} \right)^2 \right]_0^z = \ln \left(\frac{z+3}{z-5} \right)^2 - \ln \left(\frac{3}{-5} \right)^2$$

Buscamos z de manera que,

$$\ln \left(\frac{z+3}{z-5} \right)^2 - \ln \left(\frac{3}{-5} \right)^2 = \ln 25 \rightarrow \ln \left(\frac{z+3}{z-5} \right)^2 = \ln \frac{9}{25} + \ln 25 \rightarrow \ln \left(\frac{z+3}{z-5} \right)^2 = \ln \left(\frac{9}{25} \cdot 25 \right) \rightarrow \ln \left(\frac{z+3}{z-5} \right)^2 = \ln 9$$

$$\left(\frac{z+3}{z-5} \right)^2 = 9 \rightarrow \frac{z+3}{z-5} = \pm 3 \begin{cases} \frac{z+3}{z-5} = 3 \rightarrow z+3=3z-15 \rightarrow 18=2z \rightarrow z=9 \\ \frac{z+3}{z-5} = -3 \rightarrow z+3=-3z+15 \rightarrow 4z=12 \rightarrow z=3 \end{cases}$$

En el caso $z = 9$, el integrando no es continuo en $[0, 9]$ por lo que esta solución no es válida.

En el caso $z = 3$, el integrando es continuo en el intervalo $[0, 3]$, esta solución es válida.

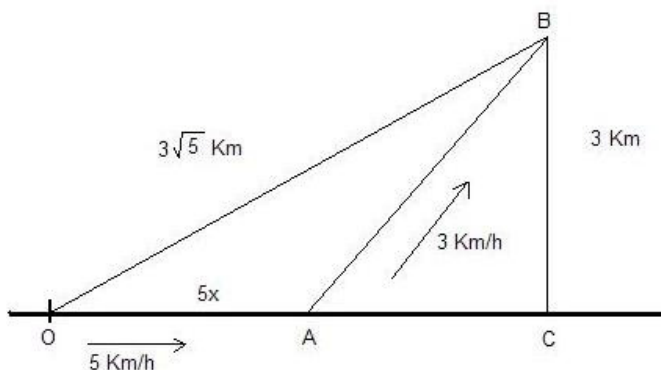
Solución $z = 3$.

EJERCICIO B

PROBLEMA 4.1. Desde un punto N de la orilla del mar, un nadador debe alcanzar una boya que flota a 3 kilómetros de la costa y dista $3\sqrt{5}$ kilómetros del punto N. Si recorriendo la orilla (que se supone recta y plana), su velocidad media es de 5 kilómetros por hora y nadando, de 3 kilómetros por hora, ¿cuánto tiempo deberá caminar hasta lanzarse al mar, para alcanzar la boya en el menor tiempo posible? (3,3 puntos)

Solución:

La representación gráfica del problema es,



OA distancia que recorre por la orilla.

AB distancia que recorre nadando

Si x = tiempo que camina por la orilla

$OA = 5x$
calculemos AB.

En el triángulo rectángulo OCB, ángulo recto en C, aplicamos el teorema de Pitágoras,

$$(3\sqrt{5})^2 = 3^2 + OC^2 \rightarrow 45 = 9 + OC^2 \rightarrow 36 = OC^2 \rightarrow OC = 6 \text{ por lo tanto } AC = 6 - 5x.$$

En el triángulo rectángulo ACB,

$$AB^2 = 3^2 + (6 - 5x)^2 \rightarrow AB^2 = 9 + 36 - 60x + 25x^2 \rightarrow AB^2 = 45 - 60x + 25x^2 \rightarrow AB = \sqrt{45 - 60x + 25x^2}$$

nadando estará $\frac{\sqrt{45 - 60x + 25x^2}}{3}$ horas

El tiempo empleado en ir desde N hasta B será: $T = x + \frac{\sqrt{45 - 60x + 25x^2}}{3}$

Como $45 - 60x + 25x^2 = (5x - 6)^2 + 9 > 0$ para cualquier valor de x , $\text{Dom } T = [0, +\infty)$

Queremos que el tiempo empleado sea el menor posible. Buscamos los mínimos relativos de T .

$$T' = 1 + \frac{1}{3} \frac{50x - 60}{2\sqrt{45 - 60x + 25x^2}} = 1 + \frac{50x - 60}{6\sqrt{45 - 60x + 25x^2}} = 1 + \frac{25x - 30}{3\sqrt{5}\sqrt{9 - 12x + 5x^2}}$$

$$T' = 0$$

$$1 + \frac{25x - 30}{3\sqrt{5}\sqrt{9 - 12x + 5x^2}} = 0 \rightarrow 3\sqrt{5}\sqrt{9 - 12x + 5x^2} + 25x - 30 = 0 \rightarrow 3\sqrt{5}\sqrt{9 - 12x + 5x^2} = 30 - 25x$$

$$\left(3\sqrt{5}\sqrt{9 - 12x + 5x^2}\right)^2 = (30 - 25x)^2 \rightarrow 45(9 - 12x + 5x^2) = 900 - 1500x + 625x^2$$

$$9(9 - 12x + 5x^2) = 180 - 300x + 125x^2 \rightarrow 81 - 108x + 45x^2 = 180 - 300x + 125x^2$$

$$80x^2 - 192x + 99 = 0$$

$$x = \frac{192 \pm \sqrt{(-192)^2 - 4 \cdot 80 \cdot 99}}{2 \cdot 80} = \frac{192 \pm \sqrt{5184}}{160} = \frac{192 \pm 72}{160} = \begin{cases} x_1 = \frac{192 + 72}{160} = \frac{264}{160} = \frac{33}{20} = 1'65 \\ x_2 = \frac{192 - 72}{160} = \frac{120}{160} = \frac{3}{4} = 0'75 \end{cases}$$

Como estamos resolviendo una ecuación irracional, debemos comprobar estos valores de x en la ecuación inicial,

$$x = 1'65$$

$$1 + \frac{25 \cdot 1'65 - 30}{3\sqrt{5}\sqrt{9 - 12 \cdot 1'65 + 5 \cdot 1'65^2}} = 0$$

$x = 1'65$ no es solución.

$$1 + \frac{11'25}{3\sqrt{5}\sqrt{28125}} = 0 \rightarrow 1 + \frac{11'25}{11'25} = 0 \rightarrow 2 = 0 \text{ Falso}$$

$$x = 0'75$$

$$1 + \frac{25 \cdot 0'75 - 30}{3\sqrt{5}\sqrt{9 - 12 \cdot 0'75 + 5 \cdot 0'75^2}} = 0$$

$x = 0,75$ es solución

$$1 + \frac{-11'25}{3\sqrt{5}\sqrt{28125}} = 0 \rightarrow 1 - \frac{11'25}{11'25} = 0 \rightarrow 0 = 0 \text{ Cierto}$$

Este valor que anula T' divide el dominio de T en dos intervalos, calculemos el signo de T' en cada uno de ellos,

int	x	T'
0-0'75	0'5	$1 + \frac{25 \cdot 0'5 - 30}{3\sqrt{5}\sqrt{5 \cdot 0'5^2 - 12 \cdot 0'5 + 9}} = 1 + \frac{-17'5}{3\sqrt{5}\sqrt{4'25}} = -0'265 < 0$
0'75-	1	$1 + \frac{25 \cdot 1 - 30}{3\sqrt{5}\sqrt{5 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 9}} = 1 + \frac{-5}{3\sqrt{5}\sqrt{2}} = 0'473 > 0$

La función T es decreciente en $(0, 0'75)$
 creciente en $(0'75, +\infty)$

En $x = 0'75$ la función T tiene un mínimo relativo, que además es el mínimo absoluto ya que en ese punto la función pasa de decreciente a creciente.

Solución: hasta lanzarse al mar deberá caminar durante 0'75 h, es decir, 45 minutos.

EJERCICIO B

PROBLEMA 4.2. La estatura de una población se distribuye normalmente con media 1,70 metros y desviación típica 0,1 metros.

- Se selecciona una persona al azar. Explicar razonadamente cómo se obtiene la probabilidad de que su estatura sea menor de 1,72 metros y calcular dicha probabilidad (1 punto).
- Se seleccionan al azar tres personas. Obtener razonadamente la probabilidad de que sólo una de las personas seleccionadas mida más de 1,72 metros (2,3 puntos).

Solución:

Si consideramos la variable aleatoria X = estatura de una persona, del enunciado del problema sabemos que $X = N(1,70, 0,1)$.

Tipificamos la variable X y tendremos, $\frac{X - 1,70}{0,1} = N(0,1) = Z$

a) El suceso “la estatura de una persona sea menor de 1,72 m” corresponde a $X < 1,72$

$$P(X < 1,72) = P\left(\frac{X - 1,70}{0,1} < \frac{1,72 - 1,70}{0,1}\right) = P\left(Z < \frac{0,02}{0,1}\right) = P(Z < 0,2) = 0,5793$$

b) Calculemos previamente la probabilidad de que una persona mida más de 1,72 m.

Usando las variables anteriores,

$$P(X > 1,72) = 1 - P(X \leq 1,72) = \{\text{como } X \text{ es una v.a. continua}\} = 1 - P(X < 1,72) = 1 - 0,5793 = 0,4207$$

Tenemos un grupo de tres personas al azar, consideramos la variable aleatoria Y = número de personas de este grupo que miden más de 1,72 m.

Y será una v.a. binomial con los siguientes parámetros: $n = 3$, $p = 0,4207$, $q = 0,5793$; $Y = B(3, 0,4207)$

El suceso “sólo una de las personas seleccionadas mida más de 1,72 metros” corresponde a $Y = 1$, la probabilidad pedida será:

$$P(Y = 1) = \binom{3}{1} 0,4207 \cdot 0,5793^2 = 3 \cdot 0,4207 \cdot 0,5793^2 = 0,4235$$