

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de junio de 2002

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Edades

Sean M la edad actual de la madre, E la del hijo mayor y Y la del menor. Hace catorce años, la suma de las edades de los hijos era $E + Y - 28$, así que

$$M - 14 = 5(E + Y - 28).$$

Dentro de diez años, la edad de la madre será la suma de las edades de los hijos en ese momento:

$$M + 10 = (E + 10) + (Y + 10), \quad \text{es decir, } M = E + Y + 10.$$

Al igualar las dos expresiones de M , resulta $E + Y = 34$ y luego $M = 44$. Cuando el mayor tenga 44 años habrán pasado $44 - E$ años; en ese momento el menor tendrá 42:

$$Y + (44 - E) = 42 \implies E - Y = 2.$$

Resolviendo $E + Y = 34$ y $E - Y = 2$ se obtiene $E = 18$ y $Y = 16$. **Conclusión.** La madre tiene 44 años; el hijo mayor, 18; y el menor, 16.

Opción A - Ejercicio 2. Rango de una matriz con parámetro

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Al ser una matriz de tres filas, su rango es como máximo tres. Algunos menores de orden tres son

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{vmatrix} = -(a-2)(a+4), \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & a+4 & -3 \end{vmatrix} = -8(a+4),$$
$$\begin{vmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 12(a+4), \quad \begin{vmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = (a+4)(3a+2).$$

Si $a \neq -4$, el segundo menor no se anula y el rango es tres. Si $a = -4$, todos los menores de orden tres se anulan; sin embargo, el menor de orden dos

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

no es nulo, de modo que el rango es dos. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 3$ si $a \neq -4$ y $\text{rg}(A) = 2$ si $a = -4$.

Opción A - Ejercicio 3. Elementos de dos cónicas y parábola

Para C_1 , dividimos entre 144:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Es una elipse con semiejes $a = 4$, $b = 3$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$. Sus vértices son $(\pm 4, 0)$ y $(0, \pm 3)$, sus focos $(\pm \sqrt{7}, 0)$ y su excentricidad $e = \sqrt{7}/4$. No tiene asíntotas.

Para C_2 :

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Es una hipérbola horizontal. Aquí $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$; sus vértices son $(\pm 4, 0)$, los focos $(\pm 5, 0)$ y $e = 5/4$. Las asíntotas son $y = \pm(b/a)x = \pm 3x/4$.

b) La parábola tiene eje horizontal y pasa por tres vértices de la elipse. Para incluir los dos vértices $(0, 3)$ y $(0, -3)$, su eje de simetría debe ser $y = 0$. La parábola que abre a la derecha tiene forma $y^2 = 4p(x - h)$. El tercer vértice es $(-4, 0)$, que obliga a que el vértice de la parábola sea $(-4, 0)$; sustituyendo $(0, 3)$,

$$9 = 4p(4) \implies 4p = \frac{9}{4}.$$

Conclusión. C_1 es la elipse descrita, C_2 la hipérbola descrita, y la parábola es $y^2 = \frac{9}{4}(x + 4)$.

Opción A - Ejercicio 4. Tangente y área

La función es racional con denominador $x^2 + 3 > 0$, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$. Para hallar los puntos de inflexión derivamos dos veces:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 3)^2}, \quad f''(x) = \frac{6(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}.$$

El denominador es positivo y el numerador cambia de signo en $x = \pm 1$; por tanto, ambos son puntos de inflexión. El de abscisa positiva es $P = (1, 1/4)$ y la pendiente de su tangente es $f'(1) = -1/8$. La recta tangente es

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x - 1) \implies y = -\frac{x}{8} + \frac{3}{8}.$$

El recinto queda entre la tangente y la gráfica para $0 \leq x \leq 1$. Para ver qué curva está arriba, calculamos la diferencia:

$$\left(-\frac{x}{8} + \frac{3}{8}\right) - \frac{1}{x^2 + 3} = \frac{(1-x)^3}{8(x^2 + 3)} \geq 0.$$

Así, el área es la integral de la recta menos la función:

$$A = \int_0^1 \left(-\frac{x}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{x^2 + 3}\right) dx = \frac{5}{16} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{16} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Conclusión. La tangente es $y = -x/8 + 3/8$ y el área encerrada vale $5/16 - \pi/(6\sqrt{3})$.

Opción B - Ejercicio 1. Plano que contiene una recta y es perpendicular a otro

La recta pasa por $P = (1, -1, 0)$ y tiene vector director $\vec{d} = (1, 2, 1)$. El plano $2x + y - z = 2$ tiene normal $\vec{n} = (2, 1, -1)$. El normal del plano buscado ha de ser perpendicular a ambos vectores; lo obtenemos con

$$\vec{n}' = \vec{d} \times \vec{n} = (-3, 3, -3),$$

y podemos simplificarlo a $(-1, 1, -1)$. Con el punto P :

$$-(x - 1) + (y + 1) - z = 0.$$

Conclusión. La ecuación general del plano es $x - y + z - 2 = 0$.

Opción B - Ejercicio 2. Cuarto vértice y área de un paralelogramo

Como A, B, C son vértices consecutivos, los lados desde B son $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, y el cuarto vértice es $D = A + C - B$:

$$D = (1, 1, 1) + (1, 3, 3) - (2, 2, 2) = (0, 2, 2).$$

Para hallar el área usamos el módulo del producto vectorial de dos lados:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, 1), \quad \overrightarrow{BC} = C - B = (-1, 1, 1),$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (0, -2, 2), \quad \text{Área} = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Ambos lados miden $\sqrt{3}$, así que es un rombo. El producto escalar de los lados adyacentes vale $1 \neq 0$, por lo que no tiene ángulos rectos. El ángulo agudo θ cumple $\cos \theta = 1/3$. **Conclusión.** El cuarto vértice es $D = (0, 2, 2)$, el área vale $2\sqrt{2}$ y es un rombo oblicuo, con $\cos \theta = 1/3$.

Opción B - Ejercicio 3. Discusión de un sistema

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = a(a+1).$$

Para $a \neq 0, -1$, el determinante no se anula: los rangos son tres y el sistema es SCD. Si $a = 0$ o $a = -1$, el menor de orden dos formado por las dos primeras columnas vale 1 o -2 , respectivamente; así, el rango de A es dos.

Para $a = 0$, la primera y la tercera ecuación tienen el mismo miembro izquierdo pero términos independientes distintos (2 y 1), así que $\text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es SI. Para $a = -1$, la tercera ecuación es combinación de las dos primeras y el rango ampliado también es dos; hay infinitas soluciones. De las ecuaciones se obtiene $z = 1$ y $x - y = 2$:

$$(x, y, z) = (2 + t, t, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $a = 2$, el determinante vale 6, luego hay solución única. Sustituyendo o eliminando se obtiene $(x, y, z) = (1, -1, -1/2)$. **Conclusión.** El sistema es SCD si $a \neq 0, -1$, SI si $a = 0$ y SCl si $a = -1$; para $a = 2$ su solución es $(1, -1, -1/2)$.

Opción B - Ejercicio 4. Dominio, continuidad, asíntotas y área

En la rama $x \geq -1$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = x + 3 + \frac{1}{x},$$

que no está definida en $x = 0$. La rama $x < -1$ sí está definida en todo su intervalo. Por tanto, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

En el punto de unión $x = -1$, el límite por la izquierda es $2(-1)/(-2) = 1$, mientras que el valor de la rama derecha es $(-1 + 3 + 1/(-1)) = -1$. Los límites laterales y el valor coinciden en $x = -1$, pues ambas ramas valen 1; por tanto, allí sí es continua. En $x = 0$, la expresión $x + 3 + 1/x$ tiende a $-\infty$ por la izquierda y a $+\infty$ por la derecha, así que $x = 0$ es una asíntota vertical.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, $2x/(x-1) \rightarrow 2$, de modo que $y = 2$ es asíntota horizontal en ese extremo. Cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - (x+3) = 1/x \rightarrow 0$, por lo que la asíntota oblicua es $y = x + 3$.

En $[1, 2]$ se aplica la primera rama, que es positiva. El área solicitada es

$$A = \int_1^2 \left(x + 3 + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln x \right]_1^2 = \frac{9}{2} + \ln 2.$$

Conclusión. El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; la función es continua en $x = -1$, tiene asíntota vertical $x = 0$, horizontal $y = 2$ en $-\infty$, oblicua $y = x + 3$ en $+\infty$, y el área vale $9/2 + \ln 2$.