

MADRID · PAU 2019 · EXTRAORDINARIA

Matemáticas II

8 ejercicios · 90 min de duración

Instrucciones del examen

El examen incluye tabla N(0,1) como anexo. Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada. CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas. TIEMPO: 90 minutos.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 2,5 puntos

Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} kx + (k+1)y + z = 0 \\ -x + ky - z = 0 \\ (k-1)x - y = -(k+1) \end{cases}$$
 se pide:

a) 2 puntos

Discutir el sistema según los valores del parámetro real k .

b) 0,5 puntos

Resolver el sistema para $k = -1$.

Ejercicio 1

OPCIÓN B 2,5 puntos

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) 1 punto

Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.

b) 0,75 puntos

Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a .

c) 0,75 puntos

Calcular, en función de a , el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

Ejercicio 2

OPCIÓN A 2,5 puntos

a) 1,25 puntos

Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1) = 1, f'(1) = 2, g(1) = 3, g'(1) = 4.$$

Dada $h(x) = f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) 1,25 puntos

Calcule la integral $\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = \sin x$.)

Ejercicio 2

OPCIÓN B 2,5 puntos

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10 - t)$.

a) 1 punto

Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) 1 punto

Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) 0,5 puntos

Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2,5 puntos

Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 3, -3)$ y $C(-3, -1, 1)$, se pide:

a) 1 punto

Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) 0,5 puntos

Obtener un punto D (distinto de A , B y C) tal que los vectores AB , AC y AD sean linealmente dependientes.

c) 1 punto

Encontrar un punto P del eje OX , de modo que el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y P sea igual a 1.

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2,5 puntos

Dados el plano $\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$, y las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ y $s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$,

se pide:

a) 1 punto

Calcular el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π .

b) 1 punto

Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π , que pasa por el punto intersección de las rectas r y s .

c) 0,5 puntos

Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s .

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2,5 puntos

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) 1,25 puntos

Se sabe que el 40% del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) 1,25 puntos

Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X , de media 5,6 y desviación típica σ . Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8,2$ es 0,67, calcule σ .

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2,5 puntos

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama $1/3$ de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1,6%, mientras que para los de alta gama es del 0,9%. En un control de calidad preventiva, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) 1 punto

Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) 1,5 puntos

Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.