

Septiembre de 2007 · Convocatoria extraordinaria

Se desarrollan los ocho problemas de los cuatro bloques. Se conservan los resultados exactos y se justifican las condiciones y operaciones empleadas.

Bloque 1 · Álgebra lineal · Problema 1.1

Estudiamos el sistema

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 5, \\ 3x + 4y + 6z = 3, \\ x + 3y + 2z = \alpha. \end{cases}$$

Existencia y unicidad de la solución

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, (A|b) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\det A = 6 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6(8 - 18) - 3(6 - 6) + 2(9 - 4) = -50 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada tiene tres filas, así que también $\text{rg}(A|b) = 3$. Por Rouché-Frobenius, como ambos rangos coinciden y valen el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado para todo α .

Cálculo de la solución

Aplicamos la regla de Cramer. En cada determinante sustituimos por la columna de términos independientes $(5, 3, \alpha)$:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10\alpha - 50, \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = 30 - 30\alpha, \\ \Delta_z &= \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = 15\alpha - 20. \end{aligned}$$

Como $\Delta = \det A = -50$, se obtiene

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1 - \frac{\alpha}{5}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3\alpha - 3}{5}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2}{5} - \frac{3\alpha}{10}.$$

La condición adicional es $x + y + z = 1$. Sustituimos las expresiones halladas:

$$1 - \frac{\alpha}{5} + \frac{3\alpha - 3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3\alpha}{10} = 1 \implies \frac{\alpha - 2}{10} = 0 \implies \alpha = 2.$$

Para ese valor, $(x, y, z) = (3/5, 3/5, -1/5)$, cuya suma es 1.

Hay solución única para todo α ; $x + y + z = 1$ si y solo si $\alpha = 2$.

Bloque 1 · Álgebra lineal · Problema 1.2

Se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, AX = \alpha X.$$

Pasamos todo al primer miembro:

$$(A - \alpha I)X = 0, A - \alpha I = \begin{pmatrix} 6 - \alpha & 4 \\ -1 & 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

Un sistema homogéneo solo tiene la solución nula cuando su matriz es invertible, es decir, cuando su determinante no es cero. Calculamos:

$$\det(A - \alpha I) = (6 - \alpha)(1 - \alpha) + 4 = \alpha^2 - 7\alpha + 10 = (\alpha - 2)(\alpha - 5).$$

Así, si $\alpha \neq 2, 5$, el determinante no se anula y necesariamente $X = (0, 0)$. En cambio, para $\alpha = 2$ o $\alpha = 5$ hay soluciones no nulas. En particular,

$$\alpha = 2: \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow X = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\alpha = 5: \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow x + 4y = 0 \Rightarrow X = t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la solución nula es la única exactamente cuando $\alpha \notin \{2, 5\}$. Para resolver $AX = 2X$, tomamos el caso $\alpha = 2$:

$$X = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Bloque 2 · Geometría · Problema 2.1

El plano, escrito en forma general, es $\pi: 2x + y + 3z - 1 = 0$, y el punto es $Q = (2, 1, 3)$.

Distancia de Q al plano

Para un plano $ax + by + cz + d = 0$, la distancia de (x_0, y_0, z_0) al plano es

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Sustituimos los coeficientes del plano y las coordenadas de Q :

$$d(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{14}}.$$

Área del triángulo de intersección con los ejes

Hallamos cada corte anulando las otras dos coordenadas:

$$z = y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = z = 0 \Rightarrow y = 1, x = y = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{3}.$$

Los vértices son $P_1 = (1/2, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ y $P_3 = (0, 0, 1/3)$. El área de un triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados:

$$P_2 - P_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right), P_3 - P_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right),$$

$$(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right),$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{12}.$$

Volumen del tetraedro

Tomamos como base el triángulo anterior y como altura la distancia de Q al plano que lo contiene. La fórmula del volumen de una pirámide es $V = Sh/3$:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{14}}{12} \cdot \frac{13}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{13}{36}}.$$

Bloque 2 · Geometría · Problema 2.2

Los dos planos ya están en forma general:

$$\pi_1 : x + 2y + z + 3 = 0, \pi_2 : 2x + y - z - 6 = 0.$$

Sus vectores normales son $n_1 = (1, 2, 1)$ y $n_2 = (2, 1, -1)$.

Ángulo entre los planos

El ángulo agudo entre dos planos es el ángulo agudo entre sus normales. Usamos

$$\cos \theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\| \|n_2\|}.$$

Aquí $n_1 \cdot n_2 = 2 + 2 - 1 = 3$ y $\|n_1\| = \|n_2\| = \sqrt{6}$. Por tanto,

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = 60^\circ}.$$

Recta de intersección, en forma paramétrica

Un vector director de la intersección debe ser perpendicular a ambos normales. El producto vectorial da

$$n_1 \times n_2 = (-3, 3, -3),$$

por lo que podemos tomar como dirección $(1, -1, 1)$. Para hallar un punto, fijamos $y = 0$ en las ecuaciones de los planos:

$$x + z = -3, 2x - z = 6 \Rightarrow x = 1, z = -4.$$

La recta queda exclusivamente en forma paramétrica:

$$\boxed{x = 1 + t, y = -t, z = -4 + t, t \in \mathbb{R}.$$

Al sustituir estas expresiones en cada plano se obtiene 0, así que todos sus puntos pertenecen a ambos planos.

Comprobación del plano bisector

El plano propuesto es $\sigma : x + y - 1 = 0$, con normal $m = (1, 1, 0)$. Sus ángulos con las normales de los planos cumplen

$$\frac{|m \cdot n_1|}{\|m\| \|n_1\|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{|m \cdot n_2|}{\|m\| \|n_2\|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En ambos casos el ángulo agudo es 30° , la mitad de 60° . También se puede comprobar que sus puntos equidistan de los dos planos: si $x + y - 1 = 0$, entonces

$$(x + 2y + z + 3) + (2x + y - z - 6) = 3(x + y - 1) = 0.$$

Los numeradores de las distancias a ambos planos son, por tanto, opuestos y tienen el mismo valor absoluto; además, los dos denominadores valen $\sqrt{6}$. El plano dado es efectivamente un bisector.

Bloque 3 · Análisis · Problema 3.1

Sean $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$ y $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$. Se pide estudiar las asíntotas de f/g y hallar una primitiva que cumpla $H(0) = 0$.

Dominio y asíntotas

Factorizamos el denominador:

$$g(x) = x^2(x + 1) + 5(x + 1) = (x + 1)(x^2 + 5).$$

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$: el factor $x^2 + 5$ siempre es positivo porque $x^2 \geq 0$, y el único cero del denominador es $x = -1$.

Para la posible asíntota vertical comprobamos ese punto. El numerador vale $f(-1) = 12 \neq 0$, mientras que el denominador tiende a 0. Cerca de -1 , el cociente tiene el comportamiento de $2/(x+1)$; así,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Hay una asíntota vertical $x = -1$.

Para $x \rightarrow \pm\infty$, el grado del numerador (2) es menor que el del denominador (3), de modo que ambos límites son 0. La asíntota horizontal es $y = 0$. No hay asíntota oblicua: ya existe una horizontal y, además, los grados no difieren en una unidad con el numerador de grado mayor.

Primitiva y condición inicial

Descomponemos en fracciones simples buscando constantes A, B, C :

$$\frac{4x^2 + 2x + 10}{(x+1)(x^2+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+5}.$$

Al igualar numeradores,

$$\begin{aligned} 4x^2 + 2x + 10 &= A(x^2 + 5) + (Bx + C)(x + 1), \\ A + B &= 4, \quad B + C = 2, \quad 5A + C = 10. \end{aligned}$$

De estas ecuaciones resulta $A = 2, B = 2, C = 0$, y por ello

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{2x}{x^2+5} dx = 2\ln|x+1| + \ln(x^2+5) + C.$$

La condición $H(0) = 0$ fija la constante en el intervalo que contiene a 0, es decir, $x > -1$:

$$0 = 2\ln 1 + \ln 5 + C \implies C = -\ln 5.$$

La condición inicial no fija la constante en el componente $x < -1$. Si usamos allí la misma constante, una primitiva válida en todo el dominio queda

$$H(x) = 2\ln|x+1| + \ln(x^2+5) - \ln 5, \quad x \neq -1.$$

Bloque 3 · Análisis · Problema 3.2

La función es $f(x) = 4/x$. Su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ya que el denominador no puede ser cero.

Límites, asíntotas y comportamiento

Al acercarnos a la única exclusión del dominio,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x} = +\infty,$$

por lo que $x = 0$ es una asíntota vertical. En los dos infinitos,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0^+,$$

así que $y = 0$ es horizontal. Para comprobar si hay una oblicua calculamos $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = 0$; la recta resultante sería horizontal, no hay otra oblicua.

La derivada es

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2}.$$

Como $x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, la derivada nunca se anula y siempre es negativa. Comprobamos el signo en cada intervalo del dominio; $x = 0$ se incluye en la tabla como punto excluido, no como extremo:

Intervalo	Prueba	Signo de f'	Comportamiento
$(-\infty, 0)$	$x = -1 : f'(-1) = -4 < 0$	—	decrece
$\{0\}$	$x = 0 : f$ no está definida	no existe	punto excluido; no es extremo
$(0, \infty)$	$x = 1 : f'(1) = -4 < 0$	—	decrece

Por tanto, f decrece en cada intervalo $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, sin puntos críticos ni máximos o mínimos.

Tangente y normal en $x = 2$

Usamos la derivada anterior para hallar la pendiente en $x = 2$:

$$f(2) = 2, f'(2) = -1.$$

La tangente pasa por $(2, 2)$ y tiene pendiente -1 . La normal es perpendicular y, por tanto, su pendiente es el opuesto del inverso, 1 :

$$\text{Tangente: } y - 2 = -(x - 2), y = -x + 4;$$

$$\text{Normal: } y - 2 = x - 2, y = x.$$

Puntos cuyas tangentes pasan por $(4, -8)$

Sea $a \neq 0$ la abscisa del punto de tangencia. El punto de la gráfica es $(a, 4/a)$ y su pendiente es $-4/a^2$. Aplicamos la ecuación punto-pendiente:

$$y - \frac{4}{a} = -\frac{4}{a^2}(x - a) \Rightarrow y = -\frac{4}{a^2}x + \frac{8}{a}.$$

Para que la recta pase por $(4, -8)$, sustituimos $x = 4, y = -8$:

$$-8 = -\frac{16}{a^2} + \frac{8}{a} \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a + 2) = 0.$$

Las dos abscisas válidas son $a = 1$ y $a = -2$. En la gráfica corresponden a

$$M = (1, 4), N = (-2, -2).$$

Bloque 4 · Problema 4.1

El programa A necesita como máximo $12 + n\sqrt[4]{n^3} = 12 + n^{7/4}$ operaciones; el programa B necesita $n^2 - 2n + 10$. Comparamos el coste de B con la cota superior del coste de A:

$$\Delta(n) = (n^2 - 2n + 10) - (12 + n^{7/4}) = n^2 - 2n - 2 - n^{7/4}.$$

Dividimos por n^2 , que es positivo para $n > 0$:

$$\frac{\Delta(n)}{n^2} = 1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^{1/4}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Como el límite es positivo, existe un tamaño a partir del cual $\Delta(n) > 0$. En este caso podemos precisar el umbral. Para $x \geq 7$, como $x^{1/4} > 3/2$, se cumple $x^{3/4} < 2x/3$, y por tanto

$$\Delta'(x) = 2x - 2 - \frac{7}{4}x^{3/4} > 2x - 2 - \frac{7}{6}x = \frac{5}{6}x - 2 > 0.$$

Además, $\Delta(7) = 33 - 7^{7/4} > 0$, pues $7^7 < 33^4$. Como Δ crece para $x \geq 7$, tenemos $\Delta(n) > 0$ para todo entero $n \geq 7$. B emplea entonces más operaciones incluso que la cota máxima de A; por ello A emplea menos operaciones para todo $n \geq 7$.

Para tamaños $n \geq 7$, el programa A necesita menos operaciones que B.

Bloque 4 · Problema 4.2

El surtidor está en $S = (0, 2)$. El borde del estanque está formado por el segmento del eje x , desde $(-2, 0)$ hasta $(2, 0)$, y el arco $y = 4 - x^2$, con $-2 \leq x \leq 2$. Para minimizar una distancia no negativa podemos minimizar su cuadrado; así evitamos raíces durante la derivación.

Las dos funciones de distancia al cuadrado que usaremos son polinomios de grados 2 y 4. No tienen asíntotas verticales; como tienden a $+\infty$ en ambos infinitos, tampoco tienen horizontales. Su crecimiento supera al de cualquier recta, así que tampoco tienen oblicuas. En el problema solo se estudia el intervalo acotado $[-2, 2]$, cuyos extremos dan valores finitos.

a) Punto más próximo del segmento

Un punto del segmento tiene coordenadas $(x, 0)$, con $-2 \leq x \leq 2$. Su distancia al cuadrado a S es

$$F_s(x) = (x-0)^2 + (0-2)^2 = x^2 + 4.$$

Derivamos y buscamos los puntos críticos del intervalo:

$$F'_s(x) = 2x = 0 \implies x = 0.$$

Comprobamos el signo a ambos lados del punto crítico:

Intervalo	Prueba	Signo de F'_s	Comportamiento
$[-2, 0)$	$x = -1 : F'_s(-1) = -2 < 0$	-	decrece
$(0, 2]$	$x = 1 : F'_s(1) = 2 > 0$	+	crece

El cambio de $-$ a $+$ confirma que $x = 0$ es un mínimo.

En los extremos $F_s(\pm 2) = 8$, mientras que $F_s(0) = 4$. Por tanto, el punto más próximo del segmento es $(0, 0)$, a distancia $\boxed{2}$.

b) Puntos más próximos del arco

Un punto del arco tiene coordenadas $(x, 4 - x^2)$, donde $-2 \leq x \leq 2$. La distancia al cuadrado al surtidor es

$$F_a(x) = x^2 + (4 - x^2 - 2)^2 = x^2 + (2 - x^2)^2 = x^4 - 3x^2 + 4.$$

Buscamos los puntos críticos y también comprobamos los extremos del intervalo:

$$F'_a(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3) = 0 \implies x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Los tres puntos críticos están dentro del intervalo. Probamos un valor en cada tramo para determinar el signo de la derivada:

Intervalo	Prueba	Signo de F'_a	Comportamiento
$[-2, -\sqrt{3/2})$	$x = -3/2 : F'_a(-3/2) = -9/2 < 0$	-	decrece
$(-\sqrt{3/2}, 0)$	$x = -1 : F'_a(-1) = 2 > 0$	+	crece
$(0, \sqrt{3/2})$	$x = 1 : F'_a(1) = -2 < 0$	-	decrece
$(\sqrt{3/2}, 2]$	$x = 3/2 : F'_a(3/2) = 9/2 > 0$	+	crece

El signo cambia de $-$ a $+$ en $x = -\sqrt{3/2}$, por lo que allí hay mínimos; en $x = 0$ cambia de $+$ a $-$, así que hay un máximo local.

Evaluamos la distancia al cuadrado en todos esos puntos y en los extremos:

$$F_a(0) = 4, F_a\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{7}{4}, F_a(\pm 2) = 8.$$

El mínimo del arco es $7/4$, así que la distancia mínima es $\sqrt{7}/2$. Para esas abscisas, $y = 4 - 3/2 = 5/2$; los puntos son

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right), \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right).$$

c) En todo el borde, el mínimo del segmento al cuadrado es 4 y el del arco es $7/4 < 4$. Por tanto, los puntos más próximos son $(\pm\sqrt{3/2}, 5/2)$, a distancia mínima $\sqrt{7}/2$.