Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2021--2022 · Enunciado v5

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Bloque A

Ejercicio 1 · Operaciones y ecuación matricial

Sean A y B matrices 3×3 y C un vector columna 3×1. Para que un producto pueda efectuarse, el número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el de filas de la segunda.
a) CA no está definido, porque las dimensiones serían $(3\times 1)(3\times 3)$. La suma sí está definida y

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

También se puede efectuar C^tB^t, cuyas dimensiones son $(1\times 3)(3\times 3)$:

$$C^tB^t=(3,-7,-2)\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=(8,6,8).$$

b) Reordenamos $AX=BX+C$ como $(A-B)X=C$. Calculamos

$$A-B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Si $X=(x,y,z)^t$, el sistema resultante es $y=3$, $2z=-7$ y $x-z=-2$. De aquí,

$$z=-\frac{7}{2},\qquad x=-\frac{11}{2},\qquad y=3.$$

$$\boxed{CA\text{ no existe};\quad A+B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix};\quad C^tB^t=(8,6,8);\quad X=\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\ 3\\ -\frac{7}{2}\end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 2 · Maximización del valor de venta

Sean x e y los lotes de tipo A y B. Las existencias imponen $2x+3y\le 400$ cuadernos y $2x+y\le 300$ estuches; además, $0\le y\le 100$ y $x\ge 0$. Queremos maximizar $V(x,y)=35x+45y$. Los vértices factibles son $(0,0)$, $(150,0)$, $(100,50)$ y $(0,100)$. El vértice de intersección se obtiene resolviendo

$$2x+3y=400,\quad 2x+y=300\quad\Longrightarrow\quad y=50,\ x=100.$$

Evaluamos la función objetivo:

$$V(0,0)=0,\quad V(150,0)=5250,\quad V(100,50)=5750,\quad V(0,100)=4500.$$

Por tanto, la papelería debe vender 100 lotes de tipo A y 50 de tipo B.

$$\boxed{x=100,\quad y=50;\qquad V_{\max}=5750\text{ euros.}}$$

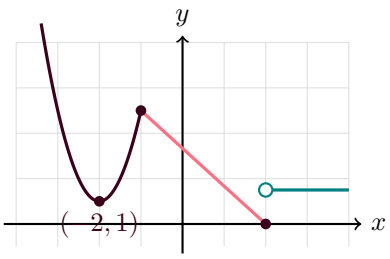
Bloque B

Ejercicio 3 · Continuidad, derivabilidad y área

La función está definida en todo $\mathbb{R}$ y cambia de expresión en $x=-1$ y $x=2$.
a) En $x=-1$, la rama cuadrática tiende a $4(-1)^2+16(-1)+17=5$, y la rama central vale $\frac{1}{3}(10+5)=5$. Es continua en -1. Las derivadas laterales son $8x+16$ y $-5/3$; en $x=-1$ valen 8 y $-5/3$, así que no es derivable allí.
En $x=2$, la rama central vale 0, mientras que por la derecha la función vale $3/2$. Hay una discontinuidad de salto y, por consiguiente, no es derivable en ese punto. En los demás puntos del dominio las expresiones

son derivables.
b) La primera rama puede escribirse $4(x+2)^2+1$, una parábola con vértice $(-2,1)$ que se aproxima al punto $(-1,5)$. La rama central es el segmento de la recta $y=(10-5x)/3$, desde $(-1,5)$ hasta $(2,0)$. Para $x>2$, la gráfica es la recta horizontal $y=3/2$, con extremo abierto en $(2,3/2)$.
c) En $[-2,-1]$ la rama cuadrática es positiva; en $[-1,2]$ la rama lineal también es no negativa. Por tanto, el área es la suma de las integrales en ambos tramos:

$$A=\int_{-2}^{-1}(4x^2+16x+17)\,dx+\int_{-1}^{2}\frac{10-5x}{3}\,dx=\frac{7}{3}+\frac{15}{2}=\frac{59}{6}.$$



Continua en $x=-1$; salto en $x=2$; $A=\dfrac{59}{6}$ unidades^2.

Ejercicio 4 · Tangentes e integral indefinida con condición

a) Una recta paralela a $y=-3x+1$ debe tener pendiente -3. Buscamos los puntos donde $f'(x)=-3$:

$$f'(x)=9x^2-12x,\qquad 9x^2-12x=-3\Longrightarrow 3x^2-4x+1=0\Longrightarrow x=1 \text{ o } x=\frac{1}{3}.$$

En esos puntos, $f(1)=2$ y $f(1/3)=40/9$. Las rectas tangentes son

$$y-2=-3(x-1)\Longrightarrow y=-3x+5,\qquad y-\frac{40}{9}=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)\Longrightarrow y=-3x+\frac{49}{9}.$$

b) Integramos término a término y después determinamos la constante con $F(2)=4$:

$$F(x)=\int(3x^3-6x^2+5)\,dx=\frac{3}{4}x^4-2x^3+5x+C.$$

Como $F(2)=12-16+10+C=4$, se obtiene $C=-2$.

$$y=-3x+5,\quad y=-3x+\frac{49}{9};\qquad F(x)=\frac{3}{4}x^4-2x^3+5x-2.$$

Bloque C

Ejercicio 5 · Unión y probabilidad condicionada

Sean A y B los sucesos indicados. Por la fórmula de la unión,

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}7+0{,}6-0{,}8=0{,}5.$$

El suceso «no ocurre ninguno» es el complementario de $A\cup B$, así que su probabilidad es $1-0{,}8=0{,}2$. La probabilidad de que ocurra A pero no B es $P(A)-P(A\cap B)=0{,}2$. Finalmente, $P(B^c)=1-0{,}6=0{,}4$, por lo que

$$P(A\mid B^c)=\frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)}=\frac{0{,}2}{0{,}4}=0{,}5.$$

$$P(A\cap B)=0{,}5;\quad P(A^c\cap B^c)=0{,}2;\quad P(A\cap B^c)=0{,}2;\quad P(A\mid B^c)=0{,}5.$$

Ejercicio 6 · Test diagnóstico y teorema de Bayes

Sean H el suceso «haber consumido alcohol» y $+$ el suceso «test positivo». Los datos son $P(H)=0{,}05$, $P(+\mid H)=0{,}96$ y $P(+\mid H^c)=0{,}10$. Así, $P(-\mid H)=0{,}04$ y $P(-\mid H^c)=0{,}90$.
a) Para invertir la condición, usamos Bayes. Primero calculamos la probabilidad total de positivo:

$$P(+)=0{,}05(0{,}96)+0{,}95(0{,}10)=0{,}143.$$

Entonces,

$$P(H \mid +) = \frac{P(H)P(+ \mid H)}{P(+)} = \frac{0{,}05(0{,}96)}{0{,}143} = \frac{48}{143} \approx 0{,}3357.$$

b) La probabilidad de un negativo en una persona que no ha bebido es $P(H^c \cap -) = 0{,}95(0{,}90) = 0{,}855$.
c) La probabilidad total de negativo es $P(-) = 0{,}05(0{,}04) + 0{,}95(0{,}90) = 0{,}857$. Por Bayes,

$$P(H^c \mid -) = \frac{P(H^c \cap -)}{P(-)} = \frac{0{,}855}{0{,}857} = \frac{855}{857} \approx 0{,}9977.$$

$$\boxed{P(H \mid +) = \frac{48}{143}; \quad P(H^c \cap -) = 0{,}855; \quad P(H^c \mid -) = \frac{855}{857}.}$$

Bloque D

Ejercicio 7 · Intervalo para una proporción

La proporción muestral de clientes satisfechos es $\widehat{p} = 96/120 = 0{,}8$ y $\widehat{q} = 0{,}2$. Para estimar una proporción usamos el intervalo

$$\widehat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{n}}.$$

Con una confianza del 95%, el valor crítico es $z_{0{,}975} = 1{,}96$. Aplicamos la fórmula del margen de error:

$$E = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{120}} \approx 0{,}0716.$$

Por tanto, el intervalo de confianza es $(0{,}8 - 0{,}0716, 0{,}8 + 0{,}0716) = (0{,}7284, 0{,}8716)$.
Para la nueva muestra, el nivel de confianza del 97% da $z_{0{,}985} \approx 2{,}170$. Queremos que el error sea como máximo $0{,}05$, por lo que imponemos esta condición y despejamos n:

$$2{,}170\sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{n}} \leq 0{,}05,$$

$$n \geq \frac{2{,}170^2(0{,}8)(0{,}2)}{0{,}05^2} \approx 301{,}4.$$

El tamaño mínimo entero es 302.

$$\boxed{IC_{95\%} \approx (0{,}7284, 0{,}8716); \qquad n_{\text{min}} = 302.}$$

Ejercicio 8 · Estimación de la media de una Normal

La varianza poblacional es 4225, así que $\sigma = 65$ kWh. La media de la muestra es $\bar{x} = 26830/100 = 268{,}3$. Para una media con desviación típica conocida utilizamos $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$. Con confianza del 92%, $z_{0{,}96} \approx 1{,}751$:

$$E = 1{,}751\frac{65}{\sqrt{100}} \approx 11{,}38, \qquad IC \approx (256{,}92, 279{,}68) \text{ kWh}.$$

Para que el error no supere 5 kWh con confianza del 98%, $z_{0{,}99} \approx 2{,}326$:

$$2{,}326\frac{65}{\sqrt{n}} \leq 5 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2{,}326 \cdot 65}{5}\right)^2 \approx 914{,}6.$$

Se necesita una muestra de al menos 915 viviendas. En el intervalo $(224{,}08, 255{,}92)$, la media es el punto medio:

$$\bar{x} = \frac{224{,}08 + 255{,}92}{2} = 240 \text{ kWh}.$$

$$\boxed{IC_{92\%} \approx (256{,}92, 279{,}68) \text{ kWh}; \quad n_{\text{min}} = 915; \quad \bar{x}_{\text{nuevo}} = 240 \text{ kWh}.}$$