

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para cubrir la propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Paquetes de golosinas

Sean a y b los paquetes de tipo A y B. Las existencias y la no negatividad imponen

$$a + b \leq 10, \quad 2a + 4b \leq 30, \quad 2a + b \leq 18, \quad a, b \geq 0.$$

Queremos maximizar $I = 1,5a + 2b$. Al intersectar las rectas frontera y comprobar las desigualdades, los vértices factibles son $(0, 0)$, $(9, 0)$, $(8, 2)$, $(5, 5)$ y $(0, 7,5)$. Los ingresos respectivos son 0, 13,5, 16, 17,5 y 15 euros.

Conviene preparar 5 paquetes A y 5 paquetes B; los ingresos máximos son 17,50 €.

Problema 2 · Función racional

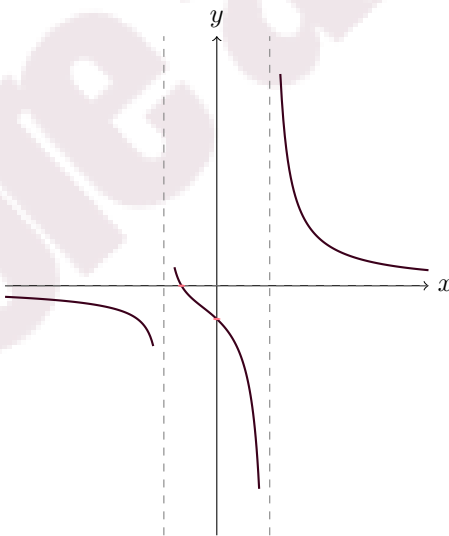
Para $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-1}$, el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. El corte con el eje X se obtiene de $3x + 2 = 0$, y el corte con el eje Y poniendo $x = 0$:

$$\left(-\frac{2}{3}, 0\right), \quad (0, -2).$$

En $x = \pm 1$ el denominador no se anula, por lo que hay asíntotas verticales. Como el grado del denominador supera al del numerador, $f(x) \rightarrow 0$ en ambos infinitos y $y = 0$ es asíntota horizontal. La derivada es

$$f'(x) = \frac{-3x^2 - 4x - 3}{(x^2 - 1)^2}.$$

El numerador es siempre negativo: el discriminante del polinomio $3x^2 + 4x + 3$ es $16 - 36 = -20 < 0$ y ese polinomio tiene coeficiente principal positivo. El denominador también es positivo en el dominio. Por tanto, f decrece en cada intervalo de su dominio y no tiene máximos ni mínimos locales.



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$; cortes $(-\frac{2}{3}, 0)$, $(0, -2)$; $x = \pm 1$, $y = 0$; sin extremos locales.

Problema 3 · Idiomas en la empresa

Sean I «habla inglés» y A «habla alemán». Se tiene $P(I) = 0,625$, $P(A | I) = 0,80$ y $P(A | \bar{I}) = 1/3$. La probabilidad de hablar ambos idiomas es

$$P(I \cap A) = 0,625 \cdot 0,80 = 0,50.$$

La probabilidad de hablar alemán es $P(A) = 0,50 + (1 - 0,625) \cdot \frac{1}{3} = 0,625$. Para el último apartado, $P(I \cap \bar{A}) = 0,625 \cdot 0,20 = 0,125$ y $P(\bar{A}) = 1 - 0,625 = 0,375$. Así,

$$P(I | \bar{A}) = \frac{0,125}{0,375} = \frac{1}{3}.$$

El enunciado impreso repite literalmente la pregunta del apartado a) en b); interpretamos b) como porcentaje que habla alemán, que es el dato que permite calcular la condición sobre quienes no hablan inglés.

$$P(I \cap A) = 50\%, \quad P(A) = 62,5\%, \quad P(I | \bar{A}) = \frac{1}{3}.$$

Opción B

Problema 1 · Operaciones con matrices

a) Calculamos primero los dos productos indicados:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad 3C = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Al sumarlos, $AB + 3C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. b) De $AX + I = D$ obtenemos $AX = D - I$. Como $\det A = 10 \neq 0$, multiplicamos por $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ a la izquierda:

$$D - I = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1}(D - I) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$AB + 3C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Producción de leche

El tiempo de ordeño se considera en $1 \leq x \leq 300$. La función

$$f(x) = 40 + \frac{120x - x^2}{5000}$$

es una parábola cóncava, pues el coeficiente de x^2 es negativo. El máximo está en el vértice:

$$x_v = -\frac{120/5000}{2(-1/5000)} = 60, \quad f(60) = 40 + \frac{3600}{5000} = 40,72.$$

Para el mínimo absoluto en el intervalo cerrado comparamos los extremos: $f(1) = 40 + 119/5000 = 40,0238$ y $f(300) = 40 - 54000/5000 = 29,2$. Por tanto el menor valor se alcanza el último día.

Máxima producción: 40,72 L en el día 60; mínima: 29,2 L en el día 300.

Problema 3 · Grupos y francés

En el grupo A hay 25 estudiantes, de los que 4 cursan francés; en el B hay 25, de los que 5 cursan francés. En total son 50 estudiantes y 9 cursan francés. a) No cursan francés $50 - 9 = 41$ estudiantes, así que la probabilidad es $41/50$. b) Sabiendo que cursa francés, la probabilidad de pertenecer al grupo B es $5/9$. c) En el grupo A, 15 son chicos y 2 de ellos cursan francés; por tanto 13 chicos no cursan francés. La probabilidad dentro del grupo es $13/25$.

$$P(\text{no francés}) = \frac{41}{50}, \quad P(B | \text{francés}) = \frac{5}{9}, \quad P(\text{chico y no francés} | A) = \frac{13}{25}.$$