

BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá sólo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y

$$2B^3 = B, \text{ siendo } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ la matriz identidad.}$$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La justificación de que la matriz A es invertible (2 puntos) y el cálculo de la matriz A^3 en función de A y de I (2 puntos).
- Los valores posibles del determinante de B . (3 puntos)
- El valor del determinante de la matriz B^2 , sabiendo que la matriz B tiene inversa (2 puntos).

PROBLEMA A.2. Se dan la recta $r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y + mz = n$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se cortan en un punto. (3 puntos)
- Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan. (3'5 puntos)
- Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π . (3'5 puntos)

PROBLEMA A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = ax$ y la función $f(x) = x^3 - ax$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes coordenados y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f . (1 + 2 puntos)
- La gráfica de la función f cuando $a = 9$. (3 puntos)
- Calcular en función del parámetro a , el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = ax$, cuando $a > 1$. (2 puntos)

- d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. (2 puntos)

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1} . (2 + 2 puntos)
- La justificación de que $A^4 = I$. (2 puntos)
- El cálculo de las matrices A^7 , A^{30} y A^{100} . (4 puntos)

PROBLEMA B.2. Se dan la recta $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi: 2x - y + bz = 0$,

siendo a y b son dos parámetros reales.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a = -b = 1$. (2'5 puntos)
- La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a = b = 4$. (2'5 puntos)
- La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b . (5 puntos)

PROBLEMA B.3. Se considera el triángulo T de vértices $O = (0, 0)$, $A = (x, y)$ y $B = (0, y)$, siendo $x > 0$, $y > 0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- El área del triángulo T en función de x . (3 puntos)
- El valor de x para el que dicha área es máxima. (5 puntos)
- El valor de dicha área máxima. (2 puntos)