

Se estudian funciones con valor absoluto, integrales, matrices trigonométricas, planos, áreas, sistemas y potencias.

### Opción A - Ejercicio 1

La expresión se descompone en

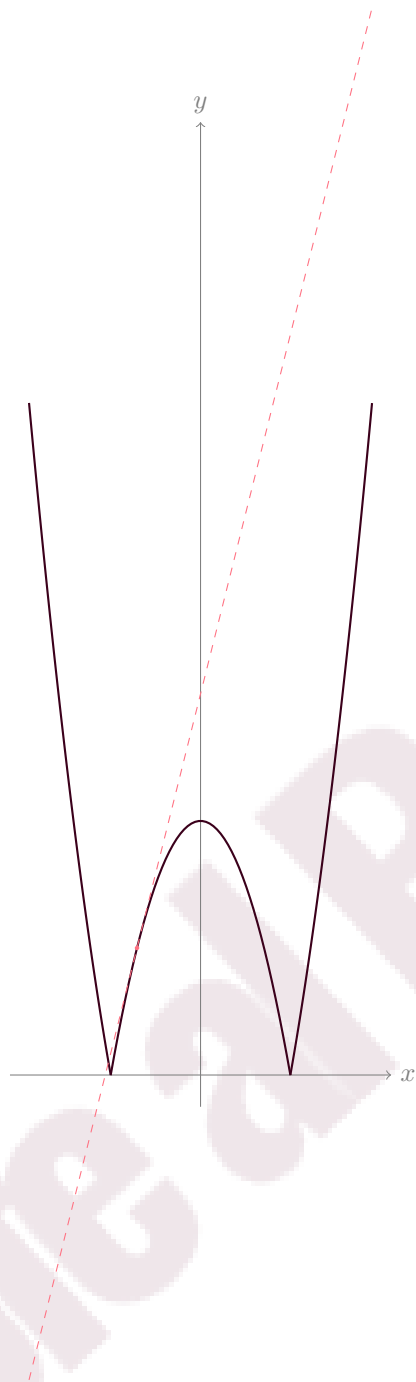
$$f(x) = \begin{cases} 8 - x^2, & |x| \leq 2\sqrt{2}, \\ x^2 - 8, & |x| > 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

La gráfica tiene un máximo relativo en  $(0, 8)$  y mínimos absolutos en  $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ . Para  $x = -2$  se usa la rama  $8 - x^2$ :  $f(-2) = 4$  y  $f'(-2) = 4$ , por lo que la tangente es  $y = 4x + 12$ . En la rama central, las intersecciones con la tangente satisfacen  $8 - x^2 = 4x + 12$ , es decir,  $(x + 2)^2 = 0$ ; aparece el punto de tangencia  $(-2, 4)$ . En las ramas exteriores:

$$x^2 - 8 = 4x + 12 \implies x = 2 \pm 2\sqrt{6}.$$

Ambas soluciones verifican  $|x| > 2\sqrt{2}$ . Los puntos de corte son

$$(-2, 4), \quad (2 - 2\sqrt{6}, 20 - 8\sqrt{6}), \quad (2 + 2\sqrt{6}, 20 + 8\sqrt{6}).$$



### Opción A - Ejercicio 2

Integramos por partes con  $u = \ln x$  y  $dv = x dx$ :

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Para que una primitiva pase por  $(1, 0)$  debe cumplir  $F(1) = 0$ ; como  $\ln 1 = 0$ , se obtiene  $C = 1/4$ . Por tanto,

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

### Opción A - Ejercicio 3

---

Sea  $s = \sin x$  y  $c = \cos x$ . La matriz tiene bloques

$$A = \begin{pmatrix} s & -c & 0 \\ c & s & 0 \\ s+c & s-c & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante es el del bloque superior izquierdo,  $s^2 + c^2 = 1$ , por lo que existe inversa para todo  $x \in \mathbb{R}$ . El inverso del bloque  $2 \times 2$  es su traspuesta; al completar la última fila se obtiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} s & c & 0 \\ -c & s & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Opción A - Ejercicio 4

---

La recta dada es intersección de los planos  $x - 2y - 3 = 0$  y  $z = 0$ . Sus normales son  $(1, -2, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ ; por tanto, la dirección de la recta es

$$\vec{d} = (1, -2, 0) \times (0, 0, 1) = (-2, -1, 0).$$

Buscamos un plano que contenga esa dirección y sea perpendicular a  $x - y + 2z + 1 = 0$ , cuyo normal es  $\vec{n}_1 = (1, -1, 2)$ . Su vector normal debe ser perpendicular a  $\vec{d}$  y a  $\vec{n}_1$ ; tomamos  $\vec{n} = \vec{d} \times \vec{n}_1 = (-2, 4, 3)$ . Al pasar por  $A = (1, 0, -1)$ :

$$-2(x - 1) + 4y + 3(z + 1) = 0 \implies -2x + 4y + 3z + 5 = 0.$$

### Opción B - Ejercicio 1

Integramos dos veces la segunda derivada:

$$f''(x) = x^2 + 2x + 2 \implies f'(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + C_1.$$

La tangente horizontal en  $P(1, 2)$  implica  $f'(1) = 0$ , de donde  $C_1 = -10/3$ . Una nueva integración da

$$f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{10x}{3} + C_2.$$

Como  $f(1) = 2$ ,  $C_2 = 47/12$ . La función pedida es

$$f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{10x}{3} + \frac{47}{12}.$$

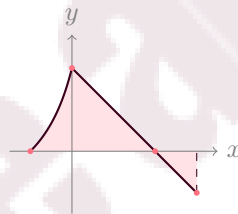
### Opción B - Ejercicio 2

La región rayada consta de tres partes: bajo la curva desde  $x = -1$  hasta 0, bajo la recta desde 0 hasta 2, y entre esa recta y el eje  $x$  desde 2 hasta 3. En  $[-1, 0]$  la curva  $g(x) = (2x+2)/(1-x)$  está sobre el eje, y la recta tiene ecuación  $y = 2 - x$ . Por tanto,

$$S = \int_{-1}^0 \frac{2x+2}{1-x} dx + \int_0^2 (2-x) dx + \int_2^3 (x-2) dx.$$

Como  $\frac{2x+2}{1-x} = -2 + \frac{4}{1-x}$ , la primera integral vale  $4 \ln 2 - 2$ . Las otras dos son 2 y  $1/2$ . Así,

$$S = 4 \ln 2 + \frac{1}{2}.$$



### Opción B - Ejercicio 3

---

Como la recta de intersección debe pasar por  $A = (0, 2, 1)$ , este punto ha de verificar ambas ecuaciones de los planos. En la primera se cumple  $2 - 7 = -5$  para cualquier  $a$ . En la segunda:

$$0 + 2 \cdot 2 + a^2 \cdot 1 = 8 \implies a^2 = 4, \quad a = \pm 2.$$

Comprobamos que el punto  $B = (6, -3, 2)$  pertenece a los dos planos solo cuando  $a = 2$ ; en particular, para  $a = -2$  no pertenece a la recta de intersección. La condición pedida es

$$\boxed{a = -2}.$$

### Opción B - Ejercicio 4

---

Para la matriz dada se comprueba mediante las multiplicaciones

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

Así queda verificado que  $A^3 + I = O$ . De esta relación,  $A^6 = I$  y

$$A^{10} = A^6 A^4 = A^4 = AA^3 = -A.$$

Luego

$$\boxed{A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}}.$$