

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Bloque A

Ejercicio 1 · Producción y precios

Cada fila de Q representa una finca y cada columna un tipo de uva. La matriz P recoge los precios por tipo de uva y finca, por lo que QP^t da, en la posición (i, j) , la producción de la finca i valorada con los precios de la finca j :

$$QP^t = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 35 \\ 0 & 60 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 & 34 \\ 38 & 37 \\ 42 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50(40) + 40(38) + 35(42) & 50(34) + 40(37) + 35(40) \\ 0(40) + 60(38) + 55(42) & 0(34) + 60(37) + 55(40) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4990 & 4580 \\ 4590 & 4420 \end{pmatrix}.$$

Como la producción está en miles de kilogramos y los precios en céntimos por kilogramo, cada unidad del producto equivale a 10 euros. Los elementos diagonales corresponden a valorar cada finca con sus propios precios: la primera obtuvo $4990 \cdot 10 = 49900$ euros y la segunda $4420 \cdot 10 = 44200$ euros. En total ingresó 94100 euros.

$$QP^t = \begin{pmatrix} 4990 & 4580 \\ 4590 & 4420 \end{pmatrix}; \quad \text{ingreso total} = 94100 \text{ €}.$$

Ejercicio 1b · Ecuación matricial

De $MX + N = V$ aislamos X . Como M es invertible,

$$X = M^{-1}(V - N).$$

En este caso,

$$V - N = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

y por tanto

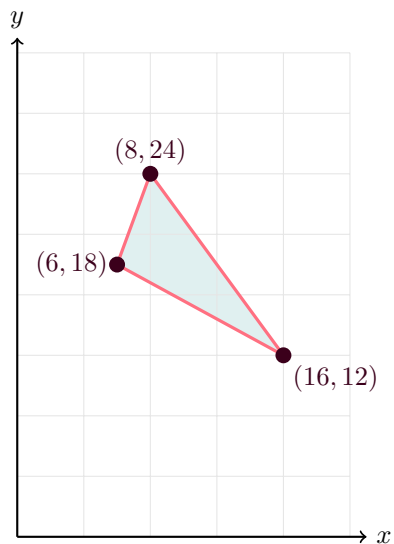
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 · Planificación de horas extraordinarias

Sean x e y las horas extraordinarias de las cadenas A y B . Las restricciones de producción son $15x + 10y \leq 360$ portátiles y $6x + 10y \geq 216$ tablets. Además, $y \leq 3x$ y $x, y \geq 0$. El coste que queremos minimizar es $C(x, y) = 300x + 600y$.

Las intersecciones de las rectas frontera que cumplen todas las restricciones son $(6, 18)$, $(8, 24)$ y $(16, 12)$. Por ejemplo, $(6, 18)$ se obtiene de $6x + 10y = 216$ junto con $y = 3x$; $(16, 12)$ resulta de igualar las dos restricciones de producción. La región factible es el triángulo de esos vértices:



Evaluamos el coste en los tres vértices, ya que una función lineal alcanza el mínimo en uno de ellos:

(x, y)	$(6, 18)$	$(8, 24)$	$(16, 12)$
$C(x, y)$	12600	16800	12000

16 horas en A, 12 horas en B; $C_{\min} = 12000 \text{ €}$.

Bloque B

Ejercicio 3 · Rectas tangentes e integrales

La recta tangente en $x = 0$ se obtiene con $y = f(0) + f'(0)x$. Para $f(x) = (3x^2 + 5x - 2)/(-3x + 7)$, la regla del cociente da

$$f(0) = -\frac{2}{7}, \quad f'(0) = \frac{5 \cdot 7 - (-2)(-3)}{7^2} = \frac{29}{49}.$$

Así, la tangente es $y = \frac{29}{49}x - \frac{2}{7}$. Para $g(x) = \ln(1/(3x + 1)) = -\ln(3x + 1)$,

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = -\frac{3}{3x + 1}, \quad g'(0) = -3,$$

por lo que su tangente es $y = -3x$.

En la primera integral usamos la primitiva de x^{-4} ; en la segunda, la integral de una exponencial:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{5}{3x^4} dx = \left[-\frac{5}{9x^3} \right]_{-2}^{-1} = \frac{35}{72}, \quad \int_{-3}^0 \frac{e^{x/3}}{5} dx = \left[\frac{3}{5} e^{x/3} \right]_{-3}^0 = \frac{3}{5}(1 - e^{-1}).$$

$$y_f = \frac{29}{49}x - \frac{2}{7}; \quad y_g = -3x; \quad I_1 = \frac{35}{72}, \quad I_2 = \frac{3}{5}(1 - e^{-1}).$$

Ejercicio 4 · Continuidad, derivabilidad y asíntotas

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, porque la primera rama es polinómica y la segunda contiene el denominador $x - 2$. El único punto de unión entre ramas es $x = 1$:

$$f(1) = 1^3 + 2(1)^2 - 3 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{x - 2} \right) = 0.$$

La función es continua en $x = 1$ y en el resto de su dominio. Sin embargo, las derivadas laterales en ese punto son $3(1)^2 + 4(1) = 7$ y $-1/(1 - 2)^2 = -1$, así que no es derivable en $x = 1$.

El denominador se anula en $x = 2$, donde

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty;$$

por ello $x = 2$ es una asíntota vertical. Cuando $x \rightarrow +\infty$, la segunda rama tiende a 1, luego $y = 1$ es una asíntota horizontal. Cuando $x \rightarrow -\infty$, la rama cúbica no se aproxima a una recta: su crecimiento es de orden x^3 , así que no hay asíntota horizontal ni oblicua en ese extremo.

Continua en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; no derivable en $x = 1$; $x = 2$ vertical, $y = 1$ horizontal para $x \rightarrow +\infty$.

Bloque C

Ejercicio 5 · Probabilidad total y condicionada

Sean A, B, C los sucesos de que el transporte lo realice un camión del tipo indicado e I el suceso «sufre una incidencia». Las proporciones son $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$ y $P(C) = 0,5$. La probabilidad de no incidencia se obtiene sumando los tres casos incompatibles:

$$P(I^c) = 0,3(0,98) + 0,2(0,99) + 0,5(0,95) = 0,967.$$

La probabilidad total de incidencia es $1 - 0,967 = 0,033$. Aplicando Bayes,

$$P(C | I) = \frac{P(I | C)P(C)}{P(I)} = \frac{0,05(0,5)}{0,033} = \frac{25}{33}.$$

El caso en que el camión sea A , haya incidencia y esta se deba a la lluvia tiene probabilidad

$$P(A \cap I \cap L) = P(A)P(I | A)P(L | I \cap A) = 0,3(0,02)(0,40) = 0,0024.$$

$$P(I^c) = 0,967; \quad P(C | I) = \frac{25}{33}; \quad P(A \cap I \cap L) = 0,0024.$$

Ejercicio 6 · Probabilidades con caramelos

Sea S el suceso «azucarado». De los azucarados, el 25% son de limón, y el resto se reparte entre naranja y menta. Si $r = P(\text{naranja} | S)$, usamos la probabilidad total para el sabor naranja:

$$0,40 = P(\text{naranja}) = 0,60r + 0,40(0,40),$$

de donde $r = 0,40$. Así, entre los azucarados, la proporción de menta es $1 - 0,25 - 0,40 = 0,35$. La probabilidad total de menta es

$$P(\text{menta}) = 0,60(0,35) + 0,40(0,30) = 0,33.$$

Los sabores de frutas (naranja o limón) tienen probabilidad $1 - 0,33 = 0,67$, mayor que la de menta.

$$P(\text{naranja} | S) = 0,40; \quad P(\text{fruta}) = 0,67 > P(\text{menta}) = 0,33.$$

Bloque D

Ejercicio 7 · Muestreo aleatorio simple y tamaño de muestra

Al seleccionar 2 números distintos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, hay $\binom{6}{2} = 15$ muestras equiprobables. Para que su media no supere 2, la suma debe ser como máximo 4. Solo sirven las parejas $\{1, 2\}$ y $\{1, 3\}$, por lo que la probabilidad es $2/15$.

Para estimar una proporción desconocida con confianza del 95% y error máximo $E = 0,15$, se utiliza

$$n \geq \frac{z_{0,975}^2 pq}{E^2}.$$

Como no se facilita una proporción previa, usamos $pq \leq 1/4$, valor que garantiza el error pedido para cualquier proporción. Con $z_{0,975} = 1,96$:

$$n \geq \frac{1,96^2(0,25)}{0,15^2} \approx 42,68.$$

Se redondea al entero superior para no superar el error.

$$P(\bar{X} \leq 2) = \frac{2}{15}; \quad n_{\min} = 43.$$

Ejercicio 8 · Intervalo para una media normal

La desviación típica poblacional es conocida, $\sigma = 18,25$ €, y $n = 361$, por lo que la media muestral tiene error típico $\sigma/\sqrt{n} = 18,25/19$. Para un intervalo bilateral de confianza del 93%, $z_{0,965} \approx 1,8119$:

$$\bar{x} \pm z_{0,965} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 97 \pm 1,8119 \frac{18,25}{19} = 97 \pm 1,7404.$$

El intervalo es (95,2596, 98,7404) euros.

El intervalo indicado en el enunciado, (95,5, 98,5), tiene error 1,5 €. Un tercio de ese error es 0,5 €. Para confianza del 91%, $z_{0,955} \approx 1,6954$; el tamaño mínimo satisface

$$n \geq \left(\frac{z_{0,955} \sigma}{0,5} \right)^2 = \left(\frac{1,6954(18,25)}{0,5} \right)^2 \approx 3829,4.$$

$$IC_{93\%} \approx (95,2596, 98,7404) \text{ €}; \quad n_{\min} = 3830.$$