

Junio de 2004 · Convocatoria ordinaria

Resolvemos los problemas paso a paso. El examen pide elegir tres de los cuatro problemas de cada ejercicio y prohíbe elegir a la vez los problemas 4.1 y 4.2.

Ejercicio A · Problema 1

Consideramos

$$\begin{cases} x - y + z = \lambda, \\ \lambda x + 2y - z = 3\lambda, \\ 2x + \lambda y - 2z = 6. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & -2 & 6 \end{array} \right).$$

Calculamos el determinante para localizar los valores del parámetro que pueden cambiar el número de soluciones:

$$\begin{aligned} \det A &= 1(2(-2) - (-1)\lambda) - (-1)(\lambda(-2) - (-1)2) + 1(\lambda^2 - 4) \\ &= \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Así, $\det A = 0$ cuando $\lambda = 3$ o $\lambda = -2$.

Si $\lambda \neq 3, -2$, este determinante de orden 3 no es cero. Por tanto, $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada tiene tres filas, así que su rango también es 3. Como

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas},$$

el teorema de Rouché-Frobenius dice que el sistema es compatible determinado (SCD).

Para $\lambda = 3$,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de orden 3 vale cero, así que $\text{rg}(A_3) \leq 2$. Pero el menor de las dos primeras filas y las dos primeras columnas es

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 5 \neq 0;$$

por tanto, $\text{rg}(A_3) = 2$. En la ampliada, al sustituir $\lambda = 3$, la tercera fila es la segunda menos la primera:

$$(2, 3, -2 \mid 6) = (3, 2, -1 \mid 9) - (1, -1, 1 \mid 3).$$

El menor anterior sigue siendo no nulo en A_3^* , y la relación entre filas muestra que no hay una tercera fila independiente. Luego $\text{rg}(A_3^*) = 2$. Como

$$\text{rg}(A_3) = \text{rg}(A_3^*) = 2 < 3,$$

Rouché-Frobenius clasifica el sistema como compatible indeterminado (SCI).

Caso $\lambda = -2$: comprobación de rangos

Al sustituir $\lambda = -2$,

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de orden 3 es cero y el menor de las filas 1 y 2, columnas x, z , vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A_{-2}) = 2$. Para la ampliada, tomamos las columnas x, z y la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -30 \neq 0.$$

Este menor de orden 3 prueba que $\text{rg}(A_{-2}^*) = 3$. Por Rouché-Frobenius,

$$\text{rg}(A_{-2}) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A_{-2}^*),$$

de modo que el sistema es incompatible (SI).

En resumen: es SCD si $\lambda \neq 3, -2$, SCI si $\lambda = 3$, y SI si $\lambda = -2$.

Para el caso compatible determinado aplicamos la regla de Cramer: $x = \Delta_x / \det A$, $y = \Delta_y / \det A$ y $z = \Delta_z / \det A$, donde $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ se obtienen sustituyendo, respectivamente, cada columna de A por la columna de términos independientes. Calculamos:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 3\lambda & 2 & -1 \\ 6 & \lambda & -2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(2(-2) - (-1)\lambda) - (-1)(3\lambda(-2) - (-1)6) + (3\lambda^2 - 12) \\ &= 4\lambda^2 - 10\lambda - 6 = 2(\lambda - 3)(2\lambda + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 3\lambda & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1(3\lambda(-2) - (-1)6) - \lambda(\lambda(-2) - (-1)2) + (6\lambda - 6\lambda) \\ &= 2\lambda^2 - 8\lambda + 6 = 2(\lambda - 3)(\lambda - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 2 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & 6 \end{vmatrix} \\ &= 1(12 - 3\lambda^2) - (-1)(6\lambda - 6\lambda) + \lambda(\lambda^2 - 4) \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Al dividir cada determinante por $\det A = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$ y simplificar los factores comunes, resulta:

$$\boxed{x = \frac{2(2\lambda + 1)}{\lambda + 2}, y = \frac{2(\lambda - 1)}{\lambda + 2}, z = \lambda - 2, \lambda \neq 3, -2.}$$

Para $\lambda = 3$, usamos las dos primeras ecuaciones y dejamos libre $z = t$:

$$\begin{aligned} x - y + t &= 3, \\ 3x + 2y - t &= 9. \end{aligned}$$

De la primera, $x = 3 + y - t$. Al sustituirla en la segunda,

$$3(3 + y - t) + 2y - t = 9 \implies 5y = 4t \implies y = \frac{4t}{5}.$$

Entonces $x = 3 - \frac{t}{5}$, y el conjunto de soluciones, escrito en forma paramétrica, es

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{t}{5}, \\ y = \frac{4t}{5}, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio A · Problema 2

La recta s es la intersección de los planos

$$\pi_1 : x + y + z = -5, \quad \pi_2 : x - 3y - z = 3,$$

se obtiene sumando las ecuaciones y despejando:

$$\begin{aligned} (x + y + z) + (x - 3y - z) &= -5 + 3, \\ 2x - 2y &= -2, \\ x - y &= -1 \implies x = y - 1. \end{aligned}$$

Al sustituir en π_1 , $(y - 1) + y + z = -5$, de donde $z = -4 - 2y$. Tomando $y = \mu$, la recta en forma paramétrica es

$$s : \begin{cases} x = -1 + \mu, \\ y = \mu, \\ z = -4 - 2\mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

La recta dada se pasa a forma paramétrica usando su parámetro común:

$$r : \begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Comprobación de si las rectas se cortan

Sus vectores directores son $\vec{v}_s = (1, 1, -2)$ y $\vec{v}_r = (2, 3, 2)$. No son proporcionales, pues sus razones entre componentes no coinciden: $1/2 \neq 1/3$. Para comprobar si se cortan, igualamos sus coordenadas:

$$\begin{cases} -1 + \mu = 2 + 2t, \\ \mu = 1 + 3t, \\ -4 - 2\mu = 2t. \end{cases}$$

Restando las dos primeras ecuaciones se obtiene $t = 2$; al sustituir en $\mu = 1 + 3t$, resulta $\mu = 7$. La tercera exigiría $-4 - 2 \cdot 7 = 2 \cdot 2$, es decir, $-18 = 4$, lo cual es falso. No se cortan y, como tampoco son paralelas, son rectas cruzadas.

El plano buscado pasa por $P_s = (-1, 0, -4)$ y contiene los vectores directores $\vec{v}_s = (1, 1, -2)$ y $\vec{v}_r = (2, 3, 2)$. Un vector normal es su producto vectorial, $\vec{n} = \vec{v}_s \times \vec{v}_r = (8, -6, 1)$. Con este normal y el punto P_s , la ecuación general es $8(x + 1) - 6y + (z + 4) = 0$, por lo que la ecuación pedida es

$$8x - 6y + z + 12 = 0.$$

Ejercicio A · Problema 3

La curva es

$$y = f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Antes de derivar, comprobamos el dominio: $x^2 \geq 0$, así que $1 + x^2 \geq 1 > 0$; el denominador nunca se anula. Por tanto, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

También comprobamos todas las asíntotas. No hay verticales porque el denominador nunca se anula. Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, la asíntota horizontal es $y = 0$. Para una posible oblicua $y = ax + b$,

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = 0.$$

Así, la posible recta también sería $y = 0$, que ya es la horizontal; no existe una oblicua distinta.

La derivada de la curva permite estudiar su crecimiento. Igualamos $f'(x)$ a cero para localizar el punto que separa los intervalos:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2} = 0 \iff x = 0.$$

El dominio no tiene fallos. Probamos un valor a cada lado: $f'(-1) = \frac{1}{2} > 0$ y $f'(1) = -\frac{1}{2} < 0$. El signo positivo indica crecimiento y el negativo, decrecimiento:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
valor de prueba	-1	0	1
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
signo	$+$	0	$-$
comportamiento	crece	máximo	decrece

En $x = 0$, $f(0) = 1$; por tanto, f tiene un máximo en $(0, 1)$.

La pendiente de la tangente en cada punto es $m(x) = f'(x)$. Para encontrar su máximo, derivamos m :

$$m(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad m'(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

El dominio de m es $\mathbb{R}$, porque $(1+x^2)^3 > 0$. Igualamos la derivada a cero:

$$m'(x) = 0 \iff 3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Para justificar los signos, elegimos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, uno en cada intervalo:

x	$(-\infty, -1/\sqrt{3})$	$-1/\sqrt{3}$	$(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	$1/\sqrt{3}$	$(1/\sqrt{3}, +\infty)$
prueba	-1		0		1
$m'(x)$	$\frac{1}{2}$	0	-2	0	$\frac{1}{2}$
signo	$+$	0	$-$	0	$+$
variación de m	crece	máximo	decrece	mínimo	crece

Máximo global de la pendiente

Además, $m(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Por tanto, el máximo global de la pendiente se alcanza en $x = -1/\sqrt{3}$, y

$$m\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2/\sqrt{3}}{(1+1/3)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

La ordenada correspondiente es $y = f(-1/\sqrt{3}) = 1/(1+1/3) = 3/4$. Por tanto, el punto donde la pendiente es máxima es $\boxed{(-1/\sqrt{3}, 3/4)}$, con pendiente máxima $\boxed{m_{\max} = 3\sqrt{3}/8}$.

Ejercicio A · Problema 4.1

La carretera está dada por $y = \frac{x^2}{4} - x$, y el río es $y = 0$. Para hallar los extremos del pinar, igualamos la carretera al eje:

$$\frac{x^2}{4} - x = 0 \iff x \left(\frac{x}{4} - 1 \right) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = 4.$$

En $0 \leq x \leq 4$, la carretera queda por debajo del río. Así, la altura del pinar es $0 - \left(\frac{x^2}{4} - x \right) = x - \frac{x^2}{4}$, y su área es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 \\ &= \left(\frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{12} \right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{12} \right) = \frac{8}{3} \text{ km}^2. \end{aligned}$$

Como $1 \text{ km}^2 = 100$ hectáreas,

$$A = \frac{800}{3} \text{ ha.}$$

Multiplicamos por el precio de cada hectárea:

$$\frac{800}{3} \cdot 60 = 16000 \text{ euros.}$$

El pinar vale **16 000 euros**.

Ejercicio A · Problema 4.2

La media de las horas es

$$\bar{x} = \frac{120 \text{ h}}{10} = 12 \text{ h,}$$

y la media de las calificaciones es $\bar{y} = 6,8$ puntos. La pendiente de la recta de regresión de y sobre x se calcula con $b = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$. Como las desviaciones típicas son iguales,

$$b = 0,8 \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0,8 \cdot 1 = 0,8.$$

La recta de regresión debe pasar por $(\bar{x}, \bar{y})$. Usamos la forma punto-pendiente:

$$\hat{y} - \bar{y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}).$$

Sustituimos los datos en esta expresión:

$$\hat{y} - 6,8 = 0,8(x - 12).$$

La ordenada en el origen es $a = \bar{y} - b\bar{x} = 6,8 - 0,8 \cdot 12 = -2,8$. Al desarrollar la forma punto-pendiente,

$$\hat{y} = 0,8x - 2,8.$$

Conclusión: la recta estimada de calificación en función de las horas de estudio es $\hat{y} = 0,8x - 2,8$.

Ejercicio B · Problema 1

La matriz es

$$B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como B es una matriz 3×3 , multiplicar cada una de sus tres filas por 2 multiplica el determinante por 2^3 ; por tanto, $\det(2B) = 2^3 \det(B) = 8 \det(B)$. Calculamos $\det(B)$ con la regla de Sarrus:

$$\begin{aligned} \det(B) &= 8x + 6x + (x+1)(2-x^2) \\ &\quad - (4x + 6(x+1) + 2x(2-x^2)) \\ &= x^3 - x^2 + 2x - 4. \end{aligned}$$

Imponemos ahora la condición del enunciado:

$$8(x^3 - x^2 + 2x - 4) = 160,$$

es decir,

$$x^3 - x^2 + 2x - 24 = 0.$$

Probamos $x = 3$: $27 - 9 + 6 - 24 = 0$, así que es una raíz. Factorizamos:

$$x^3 - x^2 + 2x - 24 = (x-3)(x^2 + 2x + 8).$$

El discriminante del segundo factor es

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4 - 32 = -28 < 0,$$

por lo que no aporta soluciones reales. Luego

$$\boxed{x = 3}.$$

Ejercicio B · Problema 2

El plano paralelo a $\pi : x - 2y - z = 0$ tiene el mismo vector normal y, por tanto, la forma general $x - 2y - z + D = 0$. Al pasar por $P = (1, 1, 1)$,

$$1 - 2 - 1 + D = 0 \implies D = 2.$$

Así,

$$\boxed{\pi_1 : x - 2y - z + 2 = 0}.$$

La recta r se escribe en forma paramétrica como

$$r : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2t, \\ z = 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

De ella tomamos el punto $R = (1, 0, 0)$ (cuando $t = 0$) y el vector director $\vec{v} = (1, 2, 3)$. Como el plano también pasa por $P = (1, 1, 1)$, contiene $\overrightarrow{RP} = P - R = (0, 1, 1)$. Un vector normal es

$$(1, 2, 3) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1).$$

Usamos ese vector normal y el punto P para escribir el plano en forma general:

$$-(x - 1) - (y - 1) + (z - 1) = 0 \implies -x - y + z + 1 = 0.$$

Multiplicamos por -1 y queda

$$\boxed{\pi_2 : x + y - z - 1 = 0}.$$

La recta intersección satisface

$$\begin{cases} x - 2y - z + 2 = 0, \\ x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Restamos la segunda ecuación de la primera: $-3y + 3 = 0$, luego $y = 1$. Al sustituir en cualquiera de los planos queda $x - z = 0$, es decir, $x = z$. Tomando $z = \lambda$, la recta en forma paramétrica es

$$\boxed{\begin{cases} x = \lambda, \\ y = 1, \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = \lambda, \end{cases}}$$

Ejercicio B · Problema 3

El denominador se factoriza como $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$, así que el integrando no está definido en $x = 5$ ni en $x = -3$. Para que la integral definida desde 0 hasta z exista como integral propia, el intervalo no puede pasar por esos puntos; por tanto, debemos tener $-3 < z < 5$.

Resolvemos

$$\int_0^z \frac{-16}{x^2 - 2x - 15} dx = \ln 25.$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-16}{(x - 5)(x + 3)} = -\frac{2}{x - 5} + \frac{2}{x + 3}.$$

Integramos cada término:

$$\int \left(-\frac{2}{x - 5} + \frac{2}{x + 3} \right) dx = -2 \ln |x - 5| + 2 \ln |x + 3| + C = 2 \ln \left| \frac{x + 3}{x - 5} \right| + C.$$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{-16}{x^2 - 2x - 15} dx &= \left[2 \ln \left| \frac{x + 3}{x - 5} \right| \right]_0^z \\ &= 2 \ln \left| \frac{z + 3}{z - 5} \right| - 2 \ln \frac{3}{5} \\ &= 2 \ln \left(\frac{5|z + 3|}{3|z - 5|} \right). \end{aligned}$$

Igualamos al dato del enunciado:

$$2 \ln \left(\frac{5|z + 3|}{3|z - 5|} \right) = \ln 25 = 2 \ln 5,$$

por lo que

$$\frac{5|z + 3|}{3|z - 5|} = 5 \implies |z + 3| = 3|z - 5|.$$

Como $-3 < z < 5$, se tiene $|z + 3| = z + 3$ y $|z - 5| = 5 - z$. Entonces

$$z + 3 = 3(5 - z) \implies 4z = 12 \implies z = 3,$$

que pertenece al intervalo permitido. En efecto, para $z = 3$, el intervalo $[0, 3]$ no contiene ninguno de los puntos singulares -3 ni 5 , así que la integral está bien definida. Por tanto,

$$\boxed{z = 3}.$$

Ejercicio B · Problema 4.1

Desde N hasta la boya hay $3\sqrt{5}$ km y la boya está a 3 km perpendicularmente a la costa. Si Q es el punto de la costa más cercano a la boya, el triángulo NQB es rectángulo. Por Pitágoras,

$$(NQ)^2 + 3^2 = (3\sqrt{5})^2 \implies NQ = \sqrt{45 - 9} = 6 \text{ km}.$$

Sea $t \geq 0$ el tiempo, en horas, que camina desde N hacia Q . En ese tiempo recorre $5t$ km; queda una separación horizontal $6 - 5t$ hasta Q . La distancia que nada y el tiempo total son

$$\begin{aligned} d_{\text{nado}}(t) &= \sqrt{(6 - 5t)^2 + 3^2} = \sqrt{(6 - 5t)^2 + 9}, \\ T(t) &= t + \frac{d_{\text{nado}}(t)}{3} = t + \frac{\sqrt{(6 - 5t)^2 + 9}}{3}. \end{aligned}$$

$$T'(t) = 1 - \frac{5(6-5t)}{3\sqrt{(6-5t)^2 + 9}},$$

$$T''(t) = \frac{75}{((6-5t)^2 + 9)^{3/2}} > 0.$$

Como $T''(t) > 0$, la derivada T' es creciente y el único punto crítico será el mínimo absoluto. Igualamos $T'(t) = 0$:

$$3\sqrt{(6-5t)^2 + 9} = 5(6-5t).$$

El lado izquierdo es positivo, por lo que $6-5t > 0$. Elevamos al cuadrado sin perder esa condición:

$$9((6-5t)^2 + 9) = 25(6-5t)^2 \implies (6-5t)^2 = \frac{81}{16}.$$

Tomamos $6-5t = 9/4$, que es la única posibilidad compatible con $6-5t > 0$, y despejamos:

$$t = \frac{6 - \frac{9}{4}}{5} = \frac{3}{4} \text{ h.}$$

Comprobamos el signo de la derivada a ambos lados del punto crítico:

$$T'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{35}{3\sqrt{85}} \approx -0,266 < 0, \quad T'(1) = 1 - \frac{5}{3\sqrt{10}} \approx 0,473 > 0.$$

t	$(0, \frac{3}{4})$	$\frac{3}{4}$	$(\frac{3}{4}, +\infty)$
valor de prueba	$\frac{1}{2}$	crítico	1
signo de T'	-	0	+
variación de T	decrece	mínimo	crece

Además, $T''(t) > 0$ en todo el dominio, así que T' es creciente y no hay otro punto crítico. El cambio de signo de negativo a positivo confirma que $t = 3/4$ da el mínimo absoluto. Por tanto, debe caminar durante

$$\frac{3}{4} \text{ h} = 45 \text{ minutos}.$$

La distancia recorrida a pie será $5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ km. Así se confirma que la duración óptima de la caminata es **45 minutos**.

Ejercicio B · Problema 4.2

Sea X la estatura de una persona, medida en metros. Entonces $X \sim N(1,70, 0,1)$. Para usar la tabla normal, tipificamos:

$$Z = \frac{X - 1,70}{0,1} \sim N(0, 1),$$

$$P(X < 1,72) = P\left(Z < \frac{1,72 - 1,70}{0,1}\right) = P(Z < 0,2).$$

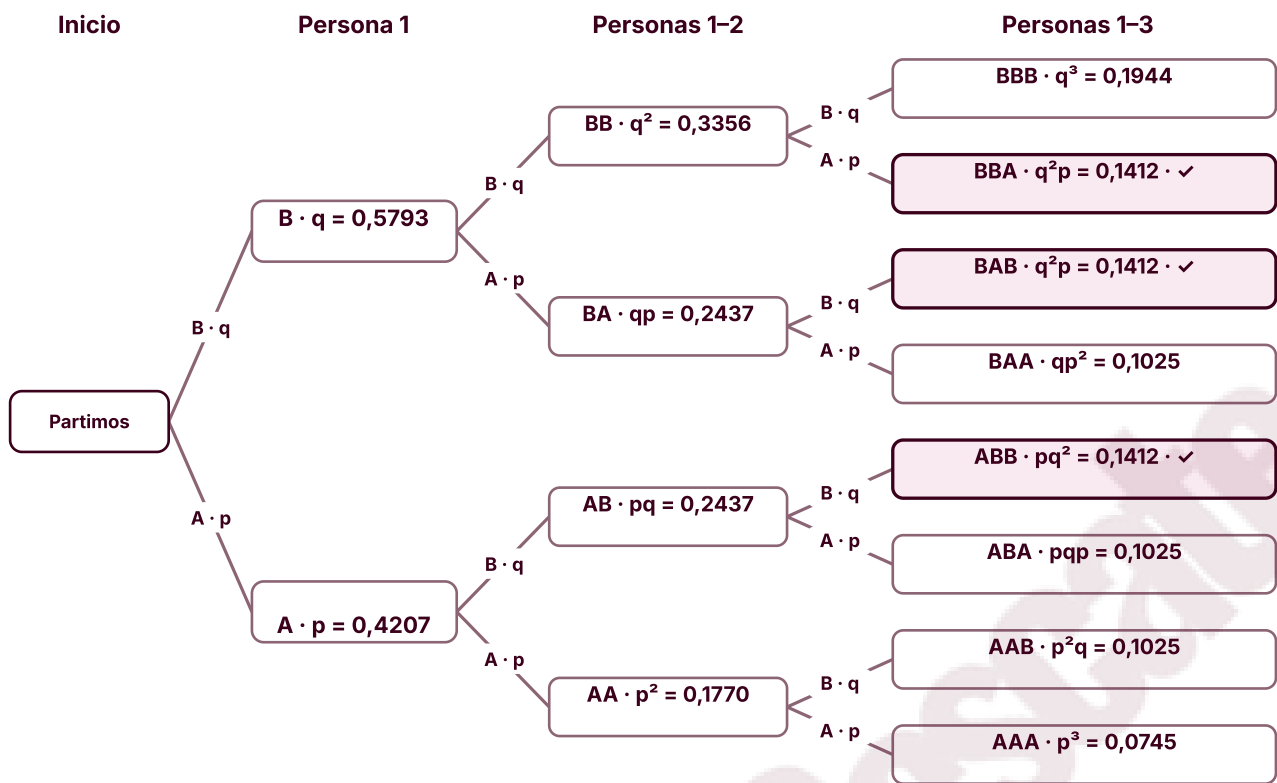
La tabla de la normal estándar da $\Phi(0,2) = 0,5793$, así que

$$P(X < 1,72) = 0,5793.$$

Como la estatura sigue una distribución continua, la probabilidad de medir exactamente **1,72 m** es cero. Así que dividimos a las personas en dos grupos que no se solapan:

$$\begin{aligned} B : \text{estatura menor o igual que } 1,72 \text{ m,} & \quad q = P(B) = 0,5793, \\ A : \text{estatura mayor que } 1,72 \text{ m,} & \quad p = P(A) = 1 - 0,5793 = 0,4207. \end{aligned}$$

Para cada persona solo hay dos opciones: **A**, supera **1,72 m**, o **B**, no lo supera. Elegimos tres personas de manera independiente, así que repetimos las mismas dos opciones tres veces. En cada tramo del árbol se indica la opción y su probabilidad; cada caja muestra el orden de resultados y la probabilidad acumulada. Buscamos los caminos que contienen una sola **A**.



B: estatura ≤ 1,72 m · A: estatura > 1,72 m · ✓: exactamente una estatura superior

Para una secuencia concreta, multiplicamos las probabilidades de los tres resultados porque las selecciones son independientes. Por ejemplo,

$$P(B-B-A) = q \cdot q \cdot p = 0,5793^2 \cdot 0,4207 \approx 0,1412.$$

El suceso pedido reúne tres secuencias incompatibles: $B-B-A$, $B-A-B$ y $A-B-B$. Sumamos sus probabilidades:

$$\begin{aligned} P(\text{exactamente una estatura superior a } 1,72) &= q^2p + qpq + pq^2 \\ &= 3q^2p \\ &= 3(0,5793)^2(0,4207) \\ &\approx 0,4235. \end{aligned}$$

Como comprobación, el número Y de personas que superan 1,72 m sigue una binomial $B(3, p)$, y

$$P(Y = 1) = \binom{3}{1}p(1-p)^2 = \binom{3}{1}(0,4207)(0,5793)^2 \approx 0,4235.$$

Conclusión: la probabilidad solicitada es **0,4235**, es decir, aproximadamente **42,35%**.