

Resolución de los seis ejercicios, incluidos todos los apartados optativos.

### Ejercicio 1

La función es  $f(t) = 7 + e^{-(t-4)^2}$ . Como  $0 < e^{-(t-4)^2} \leq 1$ , se cumple

$$7 < f(t) \leq 8.$$

El valor 8 se alcanza en  $t = 4$ , mientras que 7 no se alcanza en ningún instante finito porque una exponencial nunca vale cero. Además,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 7,$$

por lo que la producción se estabiliza en 7 metros cúbicos.

### Ejercicio 2

Los puntos simétricos tienen como punto medio el punto medio de  $PQ$  y el segmento  $PQ$  es perpendicular al plano de simetría. Calculamos

$$M = \frac{P+Q}{2} = (5, 0, 2), \quad \overrightarrow{PQ} = (2, 4, -2).$$

Así,  $\overrightarrow{PQ}$  es un vector normal del plano buscado. Al usar  $M$ :

$$(1, 2, -1) \cdot ((x, y, z) - (5, 0, 2)) = 0,$$

por lo que el plano es  $x + 2y - z - 3 = 0$ .

Para el ángulo  $\alpha$  entre la recta  $PQ$  y el plano de normal  $\vec{n} = (2, 1, 1)$ , el seno de ese ángulo es el coseno del ángulo entre  $\vec{d} = \overrightarrow{PQ}$  y  $\vec{n}$ :

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{d}\| \|\vec{n}\|} = \frac{6}{(2\sqrt{6})(\sqrt{6})} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto,  $\alpha = 30^\circ$ .

### Ejercicio 3.1

En  $x = 1/2$ , el primer tramo es  $2(1 - x^2)$ , pues allí  $x^2 < 1$ . Su valor y derivada lateral son

$$f_-(1/2) = \frac{3}{2}, \quad f'_-(1/2) = -2.$$

Para que la función sea derivable, primero igualamos los valores de ambos tramos y luego sus derivadas:

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{2} = \frac{3}{2}, \quad a + b = -2.$$

Equivalentemente,  $a + 2b = 6$  y  $a + b = -2$ . Al resolver,  $a = -10, b = 8$ .

### Ejercicio 3.2

En  $[0, 2]$ ,  $|x| = x$ , así que

$$\int_0^2 \frac{x}{|x|+1} dx = \int_0^2 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = 2 - \ln 3.$$

En todo el dominio,  $f(-x) = -f(x)$  porque el denominador depende de  $|x|$  y el numerador cambia de signo. Es una función impar; por simetría,

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = 0.$$

### Ejercicio 4.1

---

Escribimos  $X = (x, y, z)$  como una matriz fila. Al reagrupar la ecuación,

$$X - 2C = B^t + XA \implies X(I - A) = B^t + 2C.$$

Con  $B^t = (-1, 2, 3)$  y  $C = (1, 4, 2)$ , el segundo miembro es  $(1, 10, 7)$ . Además,

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X(I - A) = (y, -y - z, -x).$$

Igualando componentes a  $(1, 10, 7)$  se obtiene  $y = 1$ ,  $z = -11$  y  $x = -7$ . Así,

$$\boxed{X = (-7, 1, -11)}.$$

### Ejercicio 4.2

---

Sea  $A$  «clase A»,  $F$  «curso francés» e  $I$  «curso inglés». De los 120 alumnos, 40 son de la clase A, 35 cursan francés y 10 pertenecen a ambos sucesos. Por inclusión-exclusión,

$$P(A \cup F) = \frac{40 + 35 - 10}{120} = \boxed{\frac{13}{24}}.$$

Hay  $30 + 15 + 20 + 20 = 85$  estudiantes que cursan inglés, de los cuales 20 son de la clase C. Por probabilidad condicionada,

$$P(C | I) = \frac{20}{85} = \boxed{\frac{4}{17}}.$$