



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \ln(1+x) - (a+1)x}{x^2}$ es finito, calcula a y el valor del límite ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Determina la función $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto $(0, 1)$, $f'(0) = 0$ y $f''(x) = \frac{1}{x+1}$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

- a) Discútelo según los valores de a . **(1.75 puntos)**
- b) Resuelve, si es posible, el sistema para $a = 1$ y $a = -2$. **(0.75 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera el punto $P(1, 0, -1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

- a) Determina el punto simétrico de P respecto de la recta r . **(1.5 puntos)**
- b) Calcula el punto de la recta r que dista $\sqrt{6}$ unidades de P . **(1 punto)**



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020**

MATEMÁTICAS II

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$ para $x \neq 2$.

- Estudia la derivabilidad de f . **(1.25 puntos)**
- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -4x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + c$.

- Halla el valor de c sabiendo que sus gráficas se cortan en el punto en el que g alcanza su máximo. **(1 punto)**
- Para $c = -3$, calcula el área de la región limitada por ambas gráficas. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- Calcula A^{37} y A^{41} . **(1.5 puntos)**
- Halla el determinante de la matriz $3A^{52}(A^t)^4$, donde A^t es la matriz traspuesta de A . **(1 punto)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los vectores $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ y $\vec{w} = (a, b, 1)$.

- Halla a y b sabiendo que los tres vectores son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$. **(1.5 puntos)**
- Para $a = 1$, calcula el valor o valores de b para que el volumen del paralelepípedo formado por dichos vectores sea de 6 unidades cúbicas. **(1 punto)**

SOLUCIONES**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \ln(1+x) - (a+1)x}{x^2}$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota la función logaritmo neperiano).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \ln(1+x) - (a+1)x}{x^2} &= \frac{0e^0 - \ln(1+0) - (a+1)0}{0^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x - \frac{1}{1+x} - (a+1)}{2x} = \frac{e^0 + 0e^0 - \frac{1}{1+0} - (a+1)}{2 \cdot 0} = \frac{1-1-a-1}{0} = \frac{-1-a}{0} = \dots \end{aligned}$$

Como el límite debe ser finito el numerador no puede ser distinto de 0, por lo que $-1-a=0 \Rightarrow a=-1$.

Seguimos calculando el valor del límite con $a = -1$.

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{-1-a}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^x + xe^x - \frac{-1}{(1+x)^2}}{2} = \\ &= \frac{e^0 + e^0 + 0e^0 - \frac{-1}{(1+0)^2}}{2} = \frac{1+1+1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Determina la función $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto $(0, 1)$, $f'(0) = 0$ y $f''(x) = \frac{1}{x+1}$.

Si $f''(x) = \frac{1}{x+1}$ entonces su integral es $f'(x)$.

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| = \ln(x+1) + C, \text{ pues } x \in (-1, +\infty)$$

Como sabemos que $f'(0) = 0$ debe cumplirse que:

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \ln(x+1) + C \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \ln(0+1) + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f'(x) = \ln(x+1)$$

Si $f'(x) = \ln(x+1)$ entonces su integral es la función $f(x)$.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \ln(x+1) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x+1) \rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} = x \ln(x+1) - \int x \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= x \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx = x \ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = x \ln(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= x \ln(x+1) - \int 1 dx + \int \frac{1}{x+1} dx = x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) = (x+1) \ln(x+1) - x + K$$

También sabemos que su gráfica pasa por el punto $(0, 1)$, lo que significa que $f(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x+1) \ln(x+1) - x + K \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = (0+1) \ln(0+1) - 0 + K \Rightarrow 1 = K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = (x+1) \ln(x+1) - x + 1}$$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

a) Discútelo según los valores de a . **(1.75 puntos)**

b) Resuelve, si es posible, el sistema para $a=1$ y $a=-2$. **(0.75 puntos)**

a) El sistema tiene asociadas la matriz de coeficientes y matriz ampliada siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}; A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow \dots$$

$$\begin{array}{l} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} 1) \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = (a-1)(a^2 + a - 2)$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$a^3 - 3a + 2 = (a-1)(a-1)(a+2)$$

$$\dots \Rightarrow (a-1)(a-1)(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Aparecen tres situaciones que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de la matriz de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a = 1$.

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de la matriz A es menor de 3.

El sistema queda $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Las tres ecuaciones son iguales y el sistema será

compatible indeterminado (infinitas soluciones). Terminamos de resolverlo.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \Rightarrow x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

CASO 3. $a = -2$.

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de la matriz A es menor de 3.

Averiguamos los rangos de A y de A/B utilizando el método de Gauss para triangular la matriz A/B.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; A/B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -4 \quad 2 \quad -4 \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 3 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \\ &\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad -4 \quad 8 \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \quad 9 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 3 \quad -3 \quad 9 \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{-2 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad -3 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{-2 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad -3 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 6}_A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

b) Para $a = 1$ las soluciones del sistema son: $x = 1 - \alpha - \beta$; $y = \alpha$; $z = \beta$. Siendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Para $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$ y en el apartado anterior hemos comprobado

que su sistema equivalente es $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ -3y + 3z = -3 \end{cases}$ y no tiene solución.
 $0 = 6$

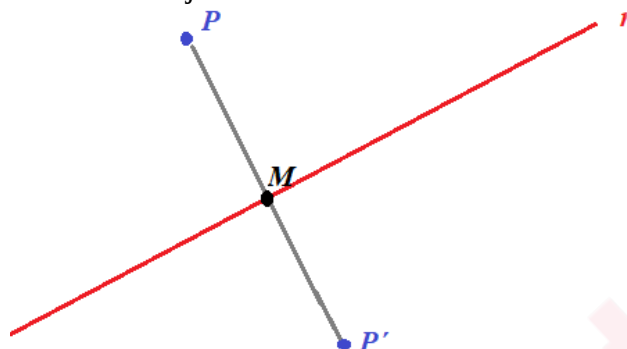
EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera el punto $P(1, 0, -1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

a) Determina el punto simétrico de P respecto de la recta r . **(1.5 puntos)**

b) Calcula el punto de la recta r que dista $\sqrt{6}$ unidades de P . **(1 punto)**

a) Nos piden hallar el punto P' del dibujo.



Hallamos el plano π perpendicular a la recta que pasa por el punto P . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z - 5 = y \\ x - 1 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2(-1 + x) - 5 = x - 2 + 2x - 5 = -7 + 3x \\ z = -1 + x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -7 + 3\alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} Q_r(0, -7, -1) \\ \vec{v}_r = (1, 3, 1) \end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 0, -1) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(1, 0, -1) \in \pi \\ \pi \equiv x + 3y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 0 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 3y + z = 0$$

Hallamos el punto M de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + 3y + z = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -7 + 3\alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + 3(-7 + 3\alpha) - 1 + \alpha = 0 \Rightarrow 11\alpha - 22 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -7 + 6 = -1 \\ z = -1 + 2 = 1 \end{cases}$$

El punto M tiene coordenadas $M(2, -1, 1)$.

El punto P' se obtiene al sumarle al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = (2, -1, 1) - (1, 0, -1) = (1, -1, 2)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = (2, -1, 1) + (1, -1, 2) = (3, -2, 3)$$

El punto P' simétrico de P respecto de la recta r tiene coordenadas $P'(3, -2, 3)$

- b) La recta r tiene las ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -7 + 3\alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases}$. Un punto Q de la recta tiene coordenadas $Q(\alpha, -7 + 3\alpha, -1 + \alpha)$.

Hacemos que la distancia de P a Q sea $\sqrt{6}$.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 0, -1) \\ Q(\alpha, -7 + 3\alpha, -1 + \alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (\alpha, -7 + 3\alpha, -1 + \alpha) - (1, 0, -1) = (\alpha - 1, -7 + 3\alpha, \alpha)$$

$$\text{Distancia}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (-7 + 3\alpha)^2 + \alpha^2} = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 1 + 49 - 42\alpha + 9\alpha^2 + \alpha^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Distancia}(P, Q) = \sqrt{11\alpha^2 - 44\alpha + 50} \\ \text{Distancia}(P, Q) = \sqrt{6} \end{array} \right\} \Rightarrow 11\alpha^2 - 44\alpha + 50 = 6 \Rightarrow 11\alpha^2 - 44\alpha + 44 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{Q(2, -1, 1)}$$

El punto de la recta r que dista $\sqrt{6}$ unidades de P es el punto $M(2, -1, 1)$ obtenido en el apartado anterior.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$ para $x \neq 2$.

a) Estudia la derivabilidad de f . **(1.25 puntos)**

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1.25 puntos)**

a) La función tiene la expresión $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{2-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{2-x} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 2 \end{cases}$.

La función tiene dominio $= \mathbb{R} - \{2\}$. No es continua y por tanto no es derivable en $x = 2$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$ y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1 \cdot (2-x) - (-x)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{-2+x-x}{(2-x)^2} = \frac{-2}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 \cdot (2-x) - (x)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 2 \end{cases}$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{(2-x)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{(2-x)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = f'(0^+)$$

Al ser diferentes los valores de las derivadas laterales la función no es derivable en $x = 0$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

b) La función derivada $f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 2 \end{cases}$ nunca se anula, por lo que solo hay

que ver si es creciente o decreciente antes, entre y después de los valores $x = 0$ y $x = 2$.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{-2}{(2-(-1))^2} = -\frac{2}{9} < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{2}{(2-1)^2} = 2 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.

- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{2}{(2-3)^2} = 2 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -4x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + c$.

a) Halla el valor de c sabiendo que sus gráficas se cortan en el punto en el que g alcanza su máximo. **(1 punto)**

b) Para $c = -3$, calcula el área de la región limitada por ambas gráficas. **(1.5 puntos)**

a) Derivamos la función g y hallamos sus puntos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = -2x^2 + 2 \\ g'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Sustituimos los dos valores en la segunda derivada para determinar su máximo.

$$g''(x) = -4x \Rightarrow \begin{cases} g''(1) = -4 < 0 \\ g''(-1) = -4(-1) = 4 > 0 \end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo en $x = 1$.

Averiguamos el valor de c para que el punto de corte de las dos gráficas sea en $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -4x + 2 \\ g(x) = -x^2 + 2x + c \\ f(1) = g(1) \end{array} \right\} \Rightarrow -4(1) + 2 = -(1)^2 + 2(1) + c \Rightarrow -2 = 1 + c \Rightarrow \boxed{c = -3}$$

b) Para $c = -3$ las gráficas se cortan en $x = 1$, averiguamos el otro punto de corte.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -4x + 2 \\ g(x) = -x^2 + 2x - 3 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -4x + 2 = -x^2 + 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} x = \frac{6+4}{2} = 5 \\ x = \frac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$$

El otro punto de corte de las gráficas es $x = 5$.

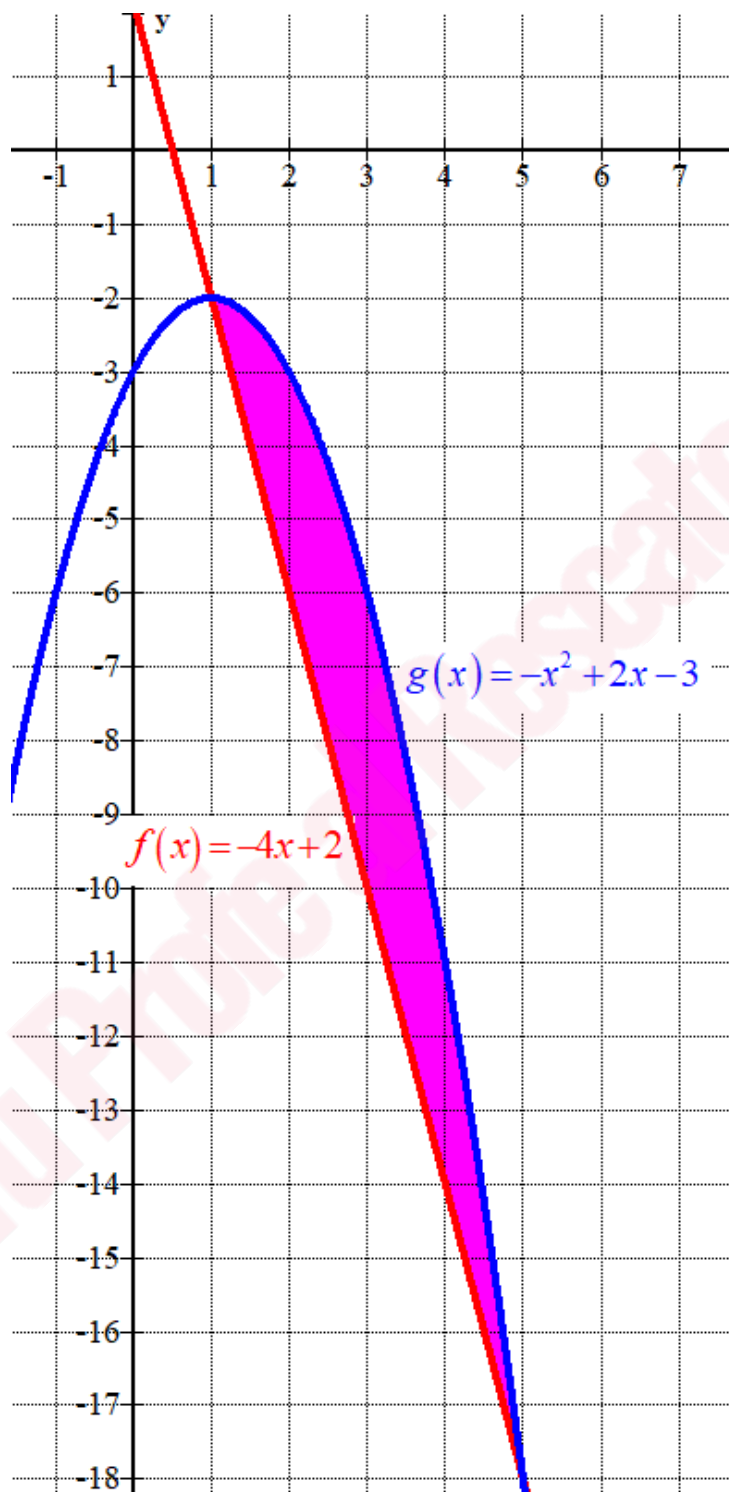
El área del recinto encerrado entre las dos gráficas es el valor absoluto de la integral definida entre 1 y 5 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_1^5 -4x + 2 - (-x^2 + 2x - 3) dx = \int_1^5 x^2 - 6x + 5 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x \right]_1^5 =$$

$$= \left[\frac{5^3}{3} - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 \right] - \left[\frac{1^3}{3} - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 \right] = \frac{125}{3} - 75 + 25 - \frac{1}{3} + 3 - 5 = \frac{124}{3} - 52 = -\frac{32}{3}$$

El área del recinto encerrado entre las dos gráficas es $\text{Área} = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3} \approx 10.66 \text{ u}^2$.

No pide dibujarla, pero lo hacemos para comprobar la bondad de la solución.



EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{37} y A^{41} . (1.5 puntos)

b) Halla el determinante de la matriz $3A^{52}(A^t)^4$, donde A^t es la matriz traspuesta de A . (1 punto)

a) Calculamos las potencias de A en busca de una regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

Como $37 = 12 \cdot 3 + 1$ tenemos que:

$$A^{37} = A^{12 \cdot 3 + 1} = (A^3)^{12} \cdot A^1 = (Id)^{12} \cdot A = Id \cdot A = A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Como $41 = 13 \cdot 3 + 2$ tenemos que:

$$A^{41} = A^{13 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{13} \cdot A^2 = (Id)^{13} \cdot A^2 = Id \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Sabemos que $|A^t| = |A|$. También que si A es una matriz cuadrada de orden 2 $\rightarrow |3A| = 3^2 |A|$.

También que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes.

$$|A| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow |A^t| = |A| = 1$$

Aplicamos estas propiedades al cálculo del determinante pedido.

$$|3A^{52}(A^t)^4| = 3^2 |A^{52}(A^t)^4| = 9 |A|^{52} |A^t|^4 = 9 \cdot 1^{52} \cdot 1^4 = \boxed{9}$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los vectores $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ y $\vec{w} = (a, b, 1)$.

a) Halla a y b sabiendo que los tres vectores son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$. **(1.5 puntos)**

b) Para $a = 1$, calcula el valor o valores de b para que el volumen del paralelepípedo formado por dichos vectores sea de 6 unidades cúbicas. **(1 punto)**

a) Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ su producto escalar es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (2, 1, 0) \\ \vec{w} = (a, b, 1) \\ \vec{u} \perp \vec{w} \end{array} \right\} \Rightarrow (2, 1, 0)(a, b, 1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2a}$$

Si los tres vectores son linealmente dependientes su producto mixto es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (2, 1, 0) \\ \vec{v} = (1, 0, -1) \\ \vec{w} = (a, b, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = -a - 1 + 2b$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Rightarrow -a - 1 + 2b = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2b - 1}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} b = -2a \\ a = 2b - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow b = -2(2b - 1) \Rightarrow b = -4b + 2 \Rightarrow 5b = 2 \Rightarrow \boxed{b = \frac{2}{5}} \Rightarrow \boxed{a = 2 \cdot \frac{2}{5} - 1 = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5}}$$

Los valores buscados son $a = -\frac{1}{5}$ y $b = \frac{2}{5}$.

b) El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (2, 1, 0) \\ \vec{v} = (1, 0, -1) \\ \vec{w} = (1, b, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 2b = -2 + 2b$$

$$\left. \begin{array}{l} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -2 + 2b \\ \text{Volumen} = 6u^3 \end{array} \right\} \Rightarrow |-2 + 2b| = 6 \Rightarrow \begin{cases} -2 + 2b = 6 \rightarrow 2b = 8 \rightarrow \boxed{b = 4} \\ -2 + 2b = -6 \rightarrow 2b = -4 \rightarrow \boxed{b = -2} \end{cases}$$

Los valores de b que hacen cumplir la condición pedida son $b = -2$ y $b = 4$.