

MADRID · PAU 2023 · ORDINARIA

Matemáticas II

8 ejercicios · 90 min de duración

Instrucciones del examen

El examen incluye tabla $N(0,1)$ como anexo. Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas. CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos. TIEMPO: 90 minutos.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 2,5 puntos

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Ejercicio 1

OPCIÓN B 2,5 puntos

Dado el sistema
$$\begin{cases} (a+1)x + 4y = 0 \\ (a-1)y + z = 3 \\ 4x + 2ay + z = 3 \end{cases}$$
, se pide:

a) 1,25 puntos

Discutirlo en función del parámetro a .

b) 0,5 puntos

Resolverlo para $a = 3$.

c) 0,75 puntos

Resolverlo para $a = 5$.

Ejercicio 2

OPCIÓN A 2,5 puntos

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$, se pide:

a) 0,25 puntos

Estudiar si es par o impar.

b) 0,75 puntos

Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.

c) 1,5 puntos

Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

Ejercicio 2

OPCIÓN B 2,5 puntos

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2+x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{2x}{3-3x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$, se pide:

a) 0,75 puntos

Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) 1 punto

Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{2x^2-1}$.

c) 0,75 puntos

Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^0 f(x)dx$.

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2,5 puntos

Sean los puntos $A(1, -2, 3)$, $B(0, 2, -1)$ y $C(2, 1, 0)$. Se pide:

a) 1,25 puntos

Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.

b) 0,75 puntos

Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z = 1$.

c) 0,5 puntos

Determinar el perímetro del triángulo T .

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2,5 puntos

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi : x - z = 2$ y el punto $A(1, 1, 1)$, se pide:

a) 0,75 puntos

Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.

b) 0,75 puntos

Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π .

c) 1 punto

Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r .

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2,5 puntos

Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0,3$.

a) 0,75 puntos

Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0,5$ es independiente de A . Calcule $P(A \cup B)$.

b) 0,75 puntos

Otro suceso C cumple $P(C | A) = 0,5$. Determine $P(A \cap \overline{C})$.

c) 1 punto

Si se tiene un suceso D tal que $P(\overline{A} | D) = 0,2$ y $P(D | A) = 0,5$, calcule $P(D)$.

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2,5 puntos

La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25,75 mm.

a) 1 punto

Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) 0,5 puntos

Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm estén el 18% de las sardinas capturadas.

c) 1 punto

En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

Tu Profe al Rescate