

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de junio de 2017

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Discusión de un sistema

Consideramos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array} \right).$$

Como A es cuadrada, su determinante permite localizar primero los valores del parámetro para los que el rango puede disminuir. Desarrollamos por la primera fila:

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} -4 & a+1 \\ 4 & -a \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = a^2 - 4 = (a-2)(a+2).$$

Caso $a \neq 2, -2$. Entonces $\det A \neq 0$, de modo que $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, pues contiene a A como submatriz. Por Rouché-Frobenius, ambos rangos coinciden con el número de incógnitas; el sistema es compatible determinado.

Caso $a = 2$. El determinante se anula. Sin embargo, el menor formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas vale

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A) = 2$. Además, para la matriz ampliada se cumple $F_1 - 2F_2 = \frac{5}{2}F_3$, así que sus filas son dependientes y $\text{rg}(A^*) = 2$. Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$, Rouché-Frobenius indica que es un sistema compatible indeterminado.

Caso $a = -2$. El determinante vuelve a ser cero. El menor de A correspondiente a las filas primera y segunda y las columnas primera y tercera es

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A) = 2$. En la ampliada, el menor de orden tres tomado con las columnas primera, tercera y de términos independientes es

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A^*) = 3$. Los rangos son distintos y, por Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible.

Conclusión. El sistema es SCD si $a \neq \pm 2$, SCI si $a = 2$ y SI si $a = -2$.

b) Solución para $a = 1$

Al sustituir $a = 1$, el sistema queda

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1, \\ x - 4y + 2z = 1, \\ 4y - z = 0. \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $z = 4y$. La segunda da $x + 4y = 1$, es decir, $x = 1 - 4y$. Sustituyendo ambas expresiones en la primera,

$$2(1 - 4y) + y + 4y = 1 \implies 2 - 3y = 1 \implies y = \frac{1}{3}.$$

Así, $x = -\frac{1}{3}$ y $z = \frac{4}{3}$. **Conclusión.** Para $a = 1$, la solución es $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

c) Solución para $a = 2$

El sistema de este caso es

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2, \\ x - 4y + 3z = 1, \\ 4y - 2z = 0. \end{cases}$$

La última ecuación da $z = 2y$, y la segunda se reduce a $x + 2y = 1$. Al sustituir estas dos relaciones en la primera se obtiene una identidad; por ello queda un parámetro libre. Tomando $y = t$,

$$x = 1 - 2t, \quad y = t, \quad z = 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $a = 2$, las soluciones son $(x, y, z) = (1 - 2t, t, 2t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Opción A - Ejercicio 2. Plano, posición de rectas y área

Sean $P = (1, -2, 1)$, $Q = (-4, 0, 1)$, $R = (-3, 1, 2)$ y $S = (0, -3, 0)$.

a) Plano que contiene a P , Q y R

Para determinar el plano necesitamos dos vectores no proporcionales contenidos en él. Los obtenemos restando las coordenadas de los puntos:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-4 - 1, 0 - (-2), 1 - 1) = (-5, 2, 0),$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (-3 - 1, 1 - (-2), 2 - 1) = (-4, 3, 1).$$

Un vector normal es el producto vectorial de ambos, pues resulta perpendicular a los dos:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 5, -7).$$

Usamos este vector normal y el punto P en la ecuación punto-normal del plano:

$$2(x - 1) + 5(y + 2) - 7(z - 1) = 0 \implies 2x + 5y - 7z + 15 = 0.$$

Conclusión. El plano que pasa por P , Q y R es $2x + 5y - 7z + 15 = 0$.

b) Posición relativa de r y s

Las rectas se escriben en forma paramétrica usando un punto y un vector director. Para r , el vector director es $\overrightarrow{PQ}$; para s , es $\overrightarrow{RS}$:

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (0 - (-3), -3 - 1, 0 - 2) = (3, -4, -2).$$

Por tanto,

$$r: \quad x = 1 - 5t, \quad y = -2 + 2t, \quad z = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$s: \quad x = -3 + 3u, \quad y = 1 - 4u, \quad z = 2 - 2u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Los vectores directores $(-5, 2, 0)$ y $(3, -4, -2)$ no son proporcionales. Para comprobar si son coplanarias calculamos el producto mixto con $\overrightarrow{PR} = (-4, 3, 1)$:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{RS} = (-4, -10, 14), \quad \overrightarrow{PR} \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{RS}) = 16 - 30 + 14 = 0.$$

El producto mixto nulo indica que las rectas son coplanarias; al no ser paralelas, se cortan. Igualando las coordenadas z resulta $u = \frac{1}{2}$; con las coordenadas x se obtiene $t = \frac{1}{2}$. Las coordenadas y coinciden también y el punto de corte es

$$(1 - 5 \cdot \frac{1}{2}, -2 + 2 \cdot \frac{1}{2}, 1) = (-\frac{3}{2}, -1, 1).$$

Conclusión. Las rectas son secantes y se cortan en $(-\frac{3}{2}, -1, 1)$.

c) Área del triángulo PQR

El área de un triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados que parten del mismo vértice. Así,

$$A_{PQR} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 5^2 + (-7)^2} = \frac{\sqrt{78}}{2}.$$

Conclusión. El área del triángulo PQR es $\frac{\sqrt{78}}{2}$ unidades cuadradas.

Opción A - Ejercicio 3. Máxima concentración de medicamento

El tiempo cumple $t \geq 0$, por lo que estudiamos $c(t) = te^{-t/2}$ en $[0, +\infty)$. Para localizar el máximo derivamos y buscamos los puntos críticos:

$$c'(t) = e^{-t/2} + t \left(-\frac{1}{2} e^{-t/2} \right) = e^{-t/2} \left(1 - \frac{t}{2} \right).$$

La exponencial es positiva; por tanto, $c'(t) > 0$ si $0 \leq t < 2$ y $c'(t) < 0$ si $t > 2$. La concentración crece hasta $t = 2$ y decrece después, de modo que alcanza allí su máximo:

$$c(2) = 2e^{-1} = \frac{2}{e} \text{ mg/ml} \approx 0,736 \text{ mg/ml}.$$

Como $\frac{2}{e} < 1$, el máximo queda por debajo de la concentración límite de 1 mg/ml. **Conclusión.** La concentración máxima es $\frac{2}{e}$ mg/ml y se alcanza a las 2 horas. No hay riesgo de superar 1 mg/ml.

Opción A - Ejercicio 4. Dominio, asíntota e integral

La función es racional:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 6}{x - 2}.$$

a) Dominio y asíntota vertical

El denominador no puede anularse, así que $x - 2 \neq 0$ y

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

En $x = 2$ el numerador vale 12, mientras que el denominador tiende a cero. Los límites laterales son

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty,$$

porque el numerador es positivo cerca de 2 y $x - 2$ cambia de signo. Por ello, $x = 2$ es una asíntota vertical.

Conclusión. El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ y la asíntota vertical es $x = 2$.

b) Límite en $+\infty$

Dividimos numerador y denominador entre x^2 , que es el término de mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 6}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1.$$

Conclusión. El límite pedido vale 1.

c) Integral definida

Dividimos el polinomio para separar la parte racional integrable mediante logaritmo:

$$\frac{x^2 + x + 6}{x - 2} = x + 3 + \frac{12}{x - 2}.$$

Por tanto,

$$\int_3^5 f(x) dx = \int_3^5 \left(x + 3 + \frac{12}{x - 2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + 12 \ln |x - 2| \right]_3^5.$$

Aplicando la regla de Barrow,

$$\left(\frac{25}{2} + 15 + 12 \ln 3 \right) - \left(\frac{9}{2} + 9 + 12 \ln 1 \right) = 14 + 12 \ln 3.$$

Conclusión. La integral definida vale $14 + 12 \ln 3$.

Opción B - Ejercicio 1. Límites, tangente y área

Sean $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \sin x$.

a) Límite en $x = 0$

Combinamos las fracciones para obtener una sola expresión, ya que ambas funciones presentan una singularidad en 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin x - x)}{x \sin x}.$$

Se obtiene una indeterminación 0/0. Aplicando L'Hôpital una primera vez,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x - 1)}{\sin x + x \cos x},$$

que sigue siendo 0/0. Aplicándolo de nuevo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

Conclusión. El límite vale 0.

b) Recta tangente en $(\frac{1}{2}, 4)$

La tangente a $y = f(x)$ en $x = a$ viene dada por $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Derivamos y evaluamos en $a = \frac{1}{2}$:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}, \quad f'(\frac{1}{2}) = -8, \quad f(\frac{1}{2}) = 4.$$

Sustituyendo en la ecuación de la tangente,

$$y - 4 = -8 \left(x - \frac{1}{2} \right) \implies y = -8x + 8.$$

Conclusión. La recta tangente es $y = -8x + 8$.

c) Área entre la curva y la recta

Los puntos de corte satisfacen $\frac{2}{x} = -x + 3$. Como $x \neq 0$,

$$2 = -x^2 + 3x \iff (x - 1)(x - 2) = 0,$$

por lo que las intersecciones corresponden a $x = 1$ y $x = 2$. En ese intervalo, la recta está por encima de la curva, pues

$$(-x + 3) - \frac{2}{x} = \frac{-(x - 1)(x - 2)}{x} \geq 0 \quad (1 \leq x \leq 2).$$

El área se obtiene integrando función superior menos función inferior:

$$\mathcal{A} = \int_1^2 \left(-x + 3 - \frac{2}{x} \right) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x \right]_1^2 = \frac{3}{2} - 2 \ln 2.$$

Conclusión. El área delimitada es $\frac{3}{2} - 2 \ln 2$ unidades cuadradas.

Opción B - Ejercicio 2. Operaciones con matrices

Sean

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Cálculo de P^{-1}

Calculamos el determinante por la primera fila:

$$\det P = 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 - 4 + 5 = -1.$$

Como es distinto de cero, existe la inversa. La matriz de cofactores y su traspuesta (la adjunta) son

$$C(P) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{Adj}(P) = C(P)^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Usando $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{Adj}(P)$,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. La inversa de P es la matriz anterior.

b) Cálculo de B^{-1}

Como $B = P^{-1}J^{-1}$, la inversa de un producto se obtiene invirtiendo el orden de los factores:

$$B^{-1} = (P^{-1}J^{-1})^{-1} = JP.$$

Multiplicar por la matriz diagonal J equivale a multiplicar las filas de P por -1 , 2 y 1 , respectivamente:

$$B^{-1} = JP = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. La matriz inversa de B es $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Determinante de A^2

Usamos la propiedad $\det(A^2) = (\det A)^2$ y la multiplicatividad del determinante:

$$\det A = \det(PJP^{-1}) = \det P \det J \det(P^{-1}) = \det J = (-1) \cdot 2 \cdot 1 = -2.$$

Por tanto,

$$\det(A^2) = (-2)^2 = 4.$$

Conclusión. El determinante de A^2 es 4.

Opción B - Ejercicio 3. Geometría en el espacio

a) Distancia entre r_1 y r_2

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica. En r_1 , $x = y = z = t$; en r_2 , ponemos $x = u$ en las ecuaciones de los planos, de donde $y = 1 - u$ y $z = 1 + u$:

$$r_1: \quad x = t, \quad y = t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$r_2: \quad x = u, \quad y = 1 - u, \quad z = 1 + u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Sus vectores directores son $\vec{d}_1 = (1, 1, 1)$ y $\vec{d}_2 = (1, -1, 1)$. Como

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = (2, 0, -2) \neq \vec{0},$$

no son paralelas. Tomamos $P_1 = (0, 0, 0) \in r_1$ y $P_2 = (0, 1, 1) \in r_2$; entonces $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 1, 1)$. El producto mixto vale

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2) = -2 \neq 0,$$

por lo que las rectas no son coplanarias y son alabeadas. Para dos rectas alabeadas, su distancia es

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2)|}{\|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\|} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Conclusión. La distancia entre las rectas es $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Corte de la recta con el plano perpendicular

En $s: x = 2 - y = z - 1$, igualamos las tres expresiones a un parámetro t :

$$s: \quad x = t, \quad y = 2 - t, \quad z = t + 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Su vector director es $(1, -1, 1)$. Un plano perpendicular a la recta tiene como vector normal un vector paralelo a su director. Al pasar por el origen, su ecuación general es

$$\pi: x - y + z = 0.$$

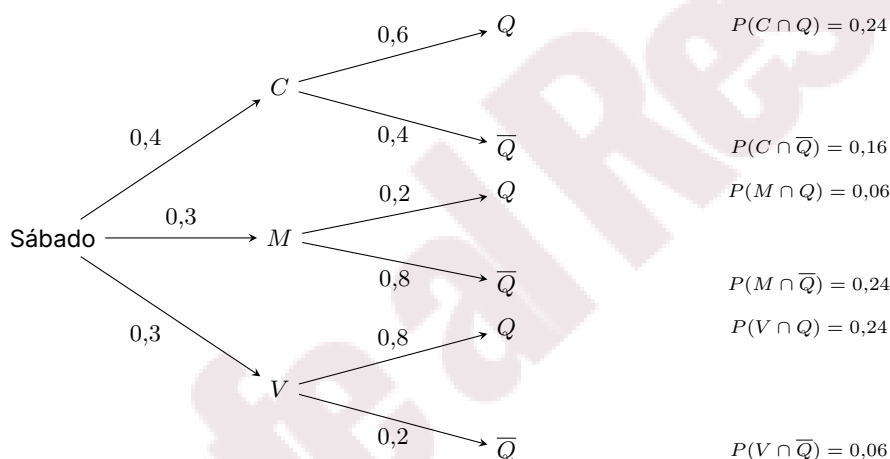
Sustituimos las coordenadas de s en el plano para obtener el punto de corte:

$$t - (2 - t) + (t + 1) = 0 \implies 3t - 1 = 0 \implies t = \frac{1}{3}.$$

Así, el punto es $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$. **Conclusión.** La recta corta al plano en $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$.

Opción B - Ejercicio 4. Probabilidad y Bayes

Denotamos por C , M y V los sucesos de que Marta vaya al cine, de compras o juegue a videojuegos; Q representa que quede con sus compañeros de baloncesto. Las probabilidades condicionales de las ramas vienen dadas por el enunciado. En cada camino multiplicamos las probabilidades de las ramas; para reunir caminos incompatibles que conducen al mismo suceso, las sumamos.



a) Probabilidad de que no quede con sus compañeros

Sumamos las probabilidades de los tres caminos que terminan en $\bar{Q}$:

$$P(\bar{Q}) = 0,4 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,16 + 0,24 + 0,06 = 0,46.$$

Conclusión. La probabilidad de que Marta no quede con sus compañeros es 0,46.

b) Probabilidad de que haya ido al cine sabiendo que quedó con ellos

Aplicamos Bayes porque conocemos que quedó con sus compañeros y queremos determinar cuál fue la actividad. Primero, la probabilidad de que quedara con ellos es

$$P(Q) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,54.$$

La fórmula de Bayes da

$$P(C | Q) = \frac{P(Q | C)P(C)}{P(Q)} = \frac{0,6 \cdot 0,4}{0,54} = \frac{0,24}{0,54} = \frac{4}{9}.$$

Conclusión. Sabiendo que quedó con sus compañeros, la probabilidad de que fueran al cine es $\frac{4}{9}$.