

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Junio de 2025 · Convocatoria ordinaria

Se resuelven las seis cuestiones de las dos opciones y el problema común.

Problema 1 · Producción en plantas y entradas

A) Sean x e y los días de funcionamiento de las plantas A y B. Las producciones mínimas exigen

$$x + y \geq 6, \quad 2x + y \geq 8, \quad x + 5y \geq 10, \quad x, y \geq 0.$$

El coste $C = 60x + 75y$ es lineal; por eso comparamos los vértices factibles. Los relevantes son $(10, 0)$, $(5, 1)$, $(2, 4)$ y $(0, 8)$, con costes 600, 375, 420 y 600 miles de euros. El menor coste corresponde a $(5, 1)$.

$$\text{Planta A: 5 días; planta B: 1 día; } C_{\min} = 375000 \text{ €}.$$

B) Sean c , m y a los espectadores que pagaron entrada completa, el 20% y el 50%, respectivamente. Del aforo y de la relación del enunciado,

$$c + m + a = 500, \quad m = 2c.$$

La entrada completa cuesta 9 €, y los otros importes son 1,8 € y 4,5 €. La recaudación permite completar el sistema:

$$9c + 1,8m + 4,5a = 2115.$$

Al sustituir $m = 2c$ y $a = 500 - 3c$, resulta $2250 - 0,9c = 2115$, luego $c = 150$, $m = 300$ y $a = 50$.

$$150 \text{ entradas completas, } 300 \text{ entradas al 20\%, } 50 \text{ entradas al 50\%}.$$

Problema 2 · Funciones y área

A) La función está definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x}, & 0 \leq x < 4, \\ 2x+4, & 4 \leq x < 8, \\ 3x+60-x^2, & 8 \leq x \leq 9. \end{cases}$$

En cada tramo es continua. En $x = 4$, el límite por la izquierda es $17/5$ y el valor por la derecha es 12, por lo que hay una discontinuidad de salto. En $x = 8$, ambos valores son 20, así que sí es continua.

En el primer tramo,

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}, \quad f'(x) = 0 \implies x = \sqrt{2} - 1$$

(la otra raíz queda fuera del tramo). La derivada es negativa antes de ese punto y positiva después. El segundo tramo crece porque $f'(x) = 2$; el tercero decrece porque $f'(x) = 3 - 2x < 0$ en $[8, 9]$. El mínimo absoluto está en $x = \sqrt{2} - 1$, donde $f = 2\sqrt{2} - 2$. El máximo absoluto es $f(8) = 20$.

Para el área pedida, la función del tercer tramo es positiva en $[8, 9]$, de modo que

$$A = \int_8^9 (3x + 60 - x^2) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + 60x - \frac{x^3}{3} \right]_8^9 = \frac{79}{6}.$$

$$\text{Salto en } x = 4; \quad \min f = 2\sqrt{2} - 2; \quad \max f = 20; \quad A = \frac{79}{6}.$$

B) Factorizamos para determinar el dominio y los cortes:

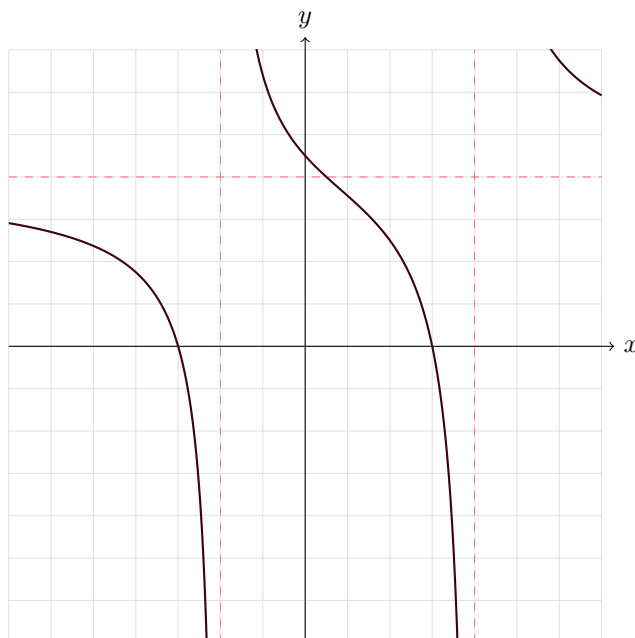
$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4(x-3)(x+3)}{(x-4)(x+2)}.$$

Así, $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$; los cortes con el eje X son $(-3, 0)$ y $(3, 0)$, y con el eje Y , $(0, 9/2)$. En $x = -2$ y $x = 4$ el numerador no se anula y los límites laterales son infinitos, así que son asíntotas verticales. Como numerador y denominador tienen el mismo grado, la asíntota horizontal es $y = 4$.

La derivada es

$$f'(x) = \frac{-8(x^2 - x + 9)}{(x^2 - 2x - 8)^2}.$$

El trinomio $x^2 - x + 9$ es siempre positivo (su discriminante es -35), por lo que $f' < 0$ en todo punto del dominio. La función decrece en cada uno de los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 4)$ y $(4, +\infty)$, y no tiene extremos locales.



$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$; $AV : x = -2, 4$; $AH : y = 4$; f decrece en cada intervalo del dominio.

Problema 3 · Tamaño del municipio y graduación

Sean S, M, L los sucesos «municipio pequeño, mediano y grande» y U «se graduó». La probabilidad total de graduarse se obtiene sumando las probabilidades de cada tamaño de municipio:

$$P(U) = 0,35 \cdot 0,20 + 0,25 \cdot 0,30 + 0,40 \cdot 0,60 = 0,385 = \frac{77}{200}.$$

Los municipios de más de 10 000 habitantes son medianos o grandes. Por Bayes,

$$P(M \cup L | U) = \frac{0,25 \cdot 0,30 + 0,40 \cdot 0,60}{0,385} = \frac{63}{77}.$$

Para la última intersección, el suceso «50 000 habitantes o menos» comprende $S \cup M$ y el segundo suceso es $U \cup M \cup L$. La intersección suma todos los municipios medianos y los graduados de municipios pequeños:

$$P((S \cup M) \cap (U \cup M \cup L)) = 0,25 + 0,35 \cdot 0,20 = 0,32 = \frac{8}{25}.$$

$$P(U) = \frac{77}{200}; \quad P(M \cup L | U) = \frac{63}{77}; \quad P(\text{intersección}) = \frac{8}{25}.$$