

ANDALUCÍA · PAU 2012 · ORDINARIA · SOLUCIÓN

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Andalucía · PAU 2012 · Ordinaria · Desarrollo razonado de las dos opciones

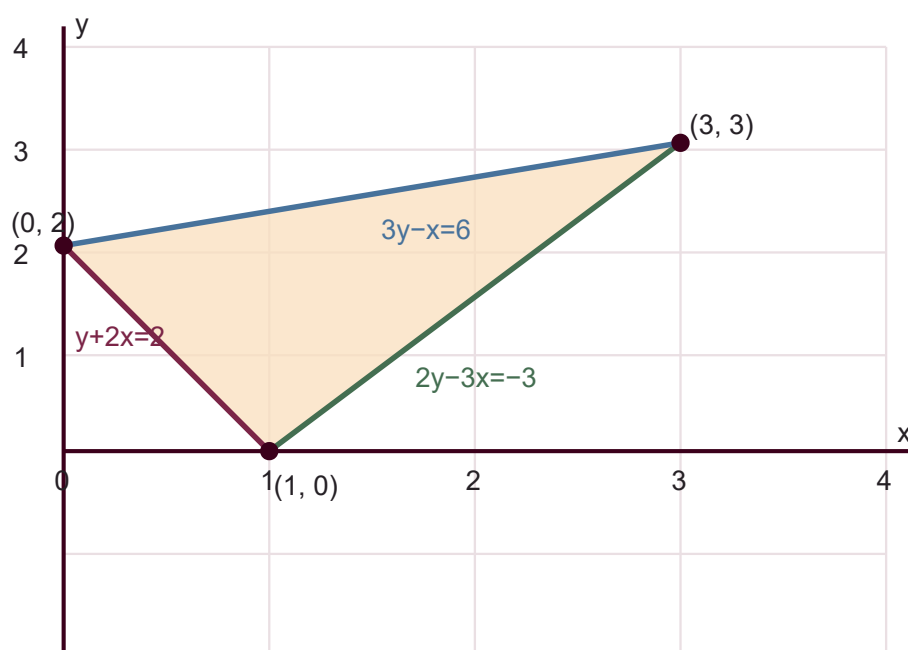
Opción A

Ejercicio 1 · Región factible y mínimo

El mínimo de F es -2 , alcanzado en $(x, y) = (0, 2)$. Lo justificamos determinando los vértices factibles y evaluando en ellos la función objetivo.

Se pide minimizar $F = 2x - y$ sujeto a $y + 2x \geq 2$, $2y - 3x \geq -3$, $3y - x \leq 6$. Al despejar:

$$y \geq 2 - 2x, \quad y \geq \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}, \quad y \leq 2 + \frac{x}{3}.$$



Región común de los tres semiplanos.

La intersección de las rectas frontera da los vértices factibles $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(3, 3)$. Evaluamos F :

Vértice	Sustitución	Valor de F
$(0, 2)$	$2 \cdot 0 - 2$	-2
$(1, 0)$	$2 \cdot 1 - 0$	2
$(3, 3)$	$2 \cdot 3 - 3$	3

Conclusión: el mínimo es -2 y se alcanza en $(x, y) = (0, 2)$.

Ejercicio 2 · Derivabilidad y recta tangente

Los parámetros son $a = 2$ y $b = -7$, y la tangente pedida es $y = -3x - 2$. Derivamos las dos ramas para imponer continuidad y derivabilidad, y calculamos después la tangente.

Para que f sea derivable en $x = 2$, se igualan continuidad y derivadas laterales:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x, & x \leq 2, \\ x^2 - bx - 4, & x > 2. \end{cases}$$

Continuidad en 2:

$$4a + 6 = 4 - 2b - 4 = -2b \implies 2a + b = -3.$$

Derivabilidad en 2: $f'_-(2) = 4a + 3$ y $f'_+(2) = 4 - b$, así que:

$$4a + 3 = 4 - b \implies 4a + b = 1. \quad \begin{cases} 2a + b = -3, \\ 4a + b = 1 \end{cases} \implies a = 2, b = -7.$$

Para $g(x) = (x + 2)/(x - 1)$, $g(0) = -2$ y, por la regla del cociente, $g'(x) = -3/(x - 1)^2$, luego $g'(0) = -3$. La tangente satisface $y - g(0) = g'(0)(x - 0)$:

$$y + 2 = -3x \implies y = -3x - 2.$$

Conclusión: $a = 2$, $b = -7$ y la recta tangente pedida es $y = -3x - 2$.

Ejercicio 3 · Proporción de accidentes y probabilidad condicionada

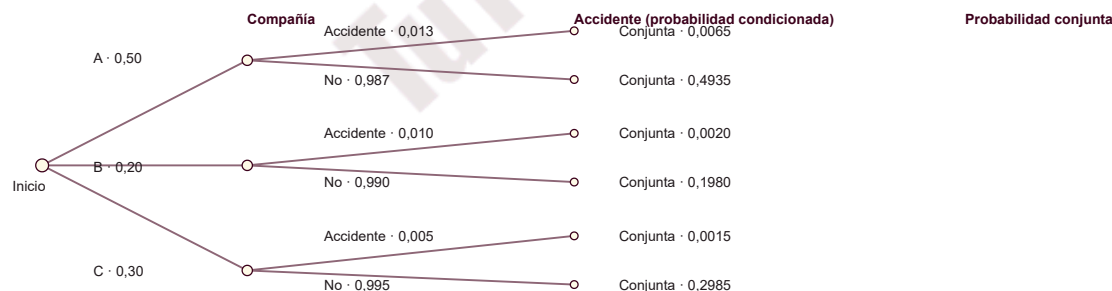
La compañía con menor tasa de accidentes es C, con 0,5 %, y $P(C|\text{accidente}) = 0,15$. Calculamos las tasas y aplicamos Bayes para justificar ambas respuestas.

Se pide identificar la compañía con menor tasa de accidentes y calcular $P(C | \text{accidente})$. Las probabilidades iniciales son las fracciones de vehículos:

$$P(A) = \frac{50,000}{100,000} = 0,50, \quad P(B) = 0,20, \quad P(C) = 0,30.$$

Dividimos los accidentes de cada compañía por sus vehículos asegurados:

$$p_A = \frac{650}{50,000} = 0,013 = 1,3\%, \quad p_B = \frac{200}{20,000} = 0,010 = 1\%, \quad p_C = \frac{150}{30,000} = 0,005 = 0,5\%.$$



La probabilidad total de accidente es la suma de las tres hojas de accidente: $0,0065 + 0,0020 + 0,0015 = 0,0100$.

La probabilidad total de accidente es $0,0065 + 0,0020 + 0,0015 = 0,0100$. La hoja «C y accidente» vale $0,30 \cdot 0,005 = 0,0015$. Por Bayes:

$$P(C | \text{accidente}) = \frac{0,0015}{0,0100} = 0,15.$$

Conclusión: la menor tasa es la de C 0,5; dado que ocurrió un accidente, la probabilidad de que corresponda a C es 15 %.

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para una proporción

El intervalo de confianza del 99 % va del 79,72 % al 95,28 %, y el tamaño mínimo pedido es 291 alumnos. A continuación justificamos el intervalo y el despeje del error muestral.

De 120 alumnos, 105 aprobaron; por tanto, $\hat{p} = 105/120 = 0,875$, $\hat{q} = 0,125$. Para confianza del 99 %, $z_{0,995} = 2,5758$.

a) Intervalo de confianza

El intervalo pedido va del 79,72 % al 95,28 %. Lo obtenemos aplicando $\hat{p} \pm z\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$:

$$0,875 \pm 2,5758 \sqrt{\frac{0,875 \cdot 0,125}{120}} = 0,875 \pm 0,07777 = (0,7972, 0,9528).$$

En porcentaje, el intervalo es de 79,72 % a 95,28 %.

b) Tamaño muestral para un error de 5 puntos porcentuales

Se necesitan como mínimo $n = 291$ alumnos. Despejamos n en $E = z\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$, usando $E = 0,05$:

$$n > \frac{2,5758^2 \cdot 0,875 \cdot 0,125}{0,05^2} \approx 290,28.$$

Al ser n entero, debe elegirse el siguiente entero.

Conclusión: se necesitan como mínimo $n = 291$ alumnos.

Opción B

Ejercicio 1 · Ecuación matricial y dimensiones

La matriz solución es $X = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Para los productos, las dimensiones son $2 \times n$ en AB y $m \times 2$ en BA .

Comprobamos el resultado calculándolo desde la ecuación.

Partimos de $AX + A^T = I$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como $\det(A) = 1 \neq 0$, A es invertible. Restamos A^T y multiplicamos a la izquierda por A^{-1} :

$$X = A^{-1}(I - A^T), \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I - A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

El producto da:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para (AB) , B ha de tener 2 filas; para (BA) , B ha de tener 2 columnas.

Conclusión: la matriz obtenida es la solución de la ecuación; las dimensiones admisibles son $2 \times n$ para AB y $m \times 2$ para BA .

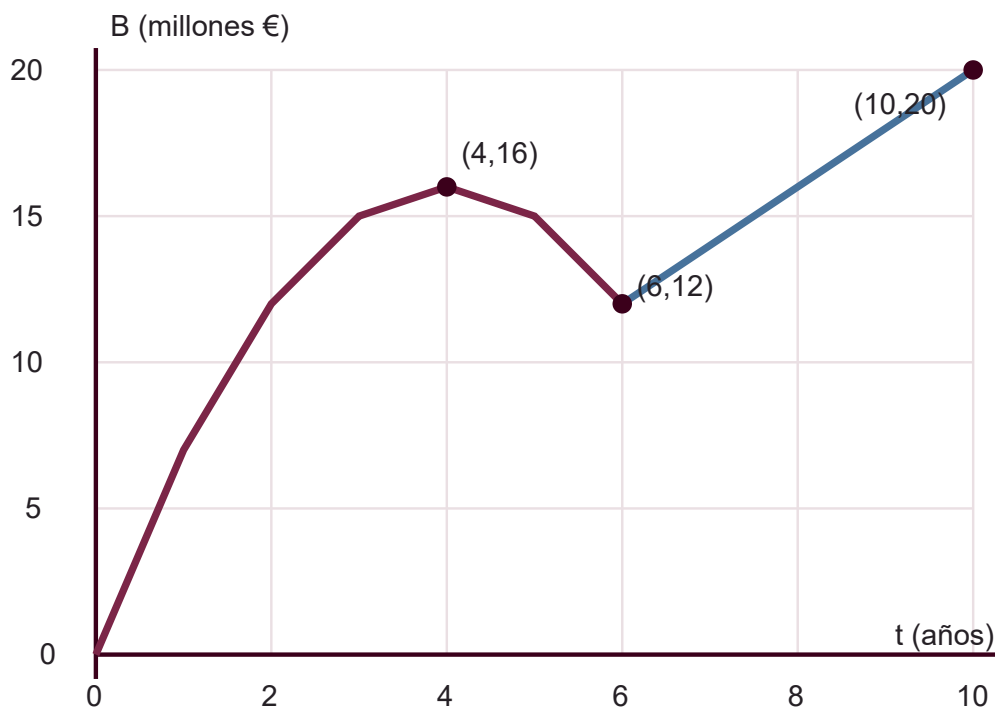
Ejercicio 2 · Continuidad y variación del beneficio

El beneficio máximo durante los primeros seis años es 16 millones de euros y se alcanza en el año 4. Primero imponemos continuidad y luego estudiamos el signo de la derivada.

El beneficio es $B(t) = at - t^2$ para $0 \leq t \leq 6$ y $B(t) = 2t$ para $t > 6$

$$6a - 36 = 12 \implies a = 8.$$

En el primer tramo, $B'(t) = 8 - 2t$; se anula en $t = 4$, es positiva antes y negativa después. En el segundo tramo $B'(t) = 2 > 0$, por lo que vuelve a crecer.



Parábola hasta $t=6$ y crecimiento lineal después.

En los primeros seis años comparamos $B(0) = 0$, $B(4) = 8 \cdot 4 - 4^2 = 16$ y $B(6) = 8 \cdot 6 - 6^2 = 12$.

Conclusión: durante los primeros seis años el beneficio máximo se alcanza en el año 4 y es de 16 millones de euros.

Ejercicio 3 · Operaciones con probabilidades

Se conocen $P(A) = 0,58$, $P(B) = 0,35$ y $P(A \cap B) = 0,12$. La fórmula de la unión es $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

a) Probabilidad de que ocurra A o B

La probabilidad solicitada es **0,81**. Aplicamos la fórmula de la unión, que resta la intersección porque ya se cuenta en ambos sucesos:

$$P(A \cup B) = 0,58 + 0,35 - 0,12 = 0,81.$$

La probabilidad pedida es **0,81**.

b) Probabilidad de que no ocurra ninguno

La probabilidad de que no ocurra ninguno es **0,19**, el complementario de la unión. Por eso restamos la probabilidad de la unión a 1:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,81 = 0,19.$$

La probabilidad es **0,19**.

c) Probabilidad de que ocurra exactamente uno

La probabilidad de que ocurra exactamente uno es **0,69**. Los sucesos $A \setminus B$ y $B \setminus A$ son incompatibles, así que sumamos sus probabilidades:

$$(0,58 - 0,12) + (0,35 - 0,12) = 0,46 + 0,23 = 0,69.$$

La probabilidad es **0,69**.

d) Probabilidad de A sabiendo que no ocurrió B

La probabilidad condicionada pedida es $46/65 \approx 0,7077$. La intersección $A \cap \bar{B}$ tiene probabilidad $0,58 - 0,12 = 0,46$; $P(\bar{B}) = 0,65$. Aplicamos probabilidad condicionada:

$$P(A | \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,46}{0,65} = \frac{46}{65} \approx 0,7077.$$

La probabilidad condicionada es $46/65 \approx 0,7077$.

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para una proporción

La proporción sí supera el 5 % con evidencia estadística: se rechaza H_0 al nivel del 5 %. Verificamos si la proporción muestral cae en la región crítica.

Se contrasta si la proporción supera el 5 %, con $n = 300$, $X = 35$ y $\alpha = 0,05$: $H_0 : p \leq 0,05$ frente a $H_1 : p > 0,05$.

Bajo $p_0 = 0,05$, el error típico es:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{0,05 \cdot 0,95}{300}} \approx 0,01258.$$

Con $z_{0,95} = 1,645$, la región crítica cumple:

$$\hat{p} > 0,05 + 1,645 \cdot 0,01258 \approx 0,07070 \iff X > 21,21, \quad X \geq 22.$$

La muestra da $\hat{p} = 35/300 \approx 0,1167$ y $z = (0,1167 - 0,05)/0,01258 \approx 5,30 > 1,645$.

Conclusión: se rechaza H_0 ; hay evidencia estadística de que la proporción supera el 5 %.