

## Modelo 6 de 2002

Rectas tangentes, funciones exponenciales, discusión de sistemas y cálculo de áreas.

### Opción A - Ejercicio 1

Sea  $t$  la abscisa del punto de tangencia de la parábola  $f(x) = x^2/4 + 4x + 4$ . La recta tangente tiene pendiente  $f'(t) = t/2 + 4$  y pasa por  $(t, f(t))$ . Para que pase por el origen, su ordenada en  $x = 0$  debe ser cero:

$$f(t) - tf'(t) = \frac{t^2}{4} + 4t + 4 - t\left(\frac{t}{2} + 4\right) = 4 - \frac{t^2}{4} = 0.$$

Así,  $t = \pm 4$ . Los puntos son  $f(4) = 24$  y  $f(-4) = -8$ , por lo que

$$(4, 24) \text{ y } (-4, -8).$$

Las tangentes correspondientes son  $y = 6x$  y  $y = 2x$ . **Opción A - Ejercicio 2**

El dominio es  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Como  $e^{2/x} \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , se tiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{2/x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{2/x} = +\infty.$$

Para la monotonía derivamos aplicando la regla del producto y la cadena:

$$f'(x) = 2xe^{2/x} + x^2 e^{2/x} \left(-\frac{2}{x^2}\right) = 2e^{2/x}(x-1).$$

El factor exponencial es positivo; el signo cambia en  $x = 1$  y el dominio además excluye  $x = 0$ . La función decrece en  $(-\infty, 0)$  y  $(0, 1)$ , y crece en  $(1, +\infty)$ . En  $x = 1$  pasa de decreciente a creciente, así que tiene un mínimo local  $f(1) = e^2$ . El punto  $x = 0$  no pertenece al dominio y no puede ser extremo. **Opción A - Ejercicio 3**

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}, \quad A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & m & 4 \end{array} \right).$$

Su determinante es  $\det A = (m-1)(m+1)$ . Si  $m \neq \pm 1$ , el determinante no se anula, ambos rangos valen 3 y el sistema es compatible determinado (SCD). Para  $m = -1$ , la segunda fila de la matriz ampliada coincide con la primera y el rango es 2; la tercera ecuación no es múltiplo de ellas, pero el sistema es compatible. Sus soluciones son

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{2} - t, t, -\frac{3}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

por lo que  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$  y es SCI. Este es el valor pedido en (b):  $m = -1$ . Para  $m = 1$ , las filas segunda y tercera de  $A$  son iguales, pero sus términos independientes son 3 y 4. Así,  $\text{rg}(A) = 2$  y  $\text{rg}(A^*) = 3$ ; el sistema es incompatible (SI). **Opción A - Ejercicio 4**

La recta es la intersección de los planos de normales  $(1, 3, 1)$  y  $(0, 1, 1)$ , de modo que su vector director es su producto vectorial  $(2, -1, 1)$ . Tomando  $z = 0$  en las ecuaciones se obtiene el punto  $Q = (2, 0, -1)$  de la recta. El punto de una recta más cercano a  $P = (1, -1, 0)$  es aquel para el cual el vector desde  $P$  es perpendicular a la dirección de la recta. Aquí

$$Q - P = (1, 1, -1), \quad (Q - P) \cdot (2, -1, 1) = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Por tanto, el punto buscado es  $Q = (2, 0, -1)$ .

### Opción B - Ejercicio 1

Para  $x > 0$ , derivamos  $\sin x/x$ ; para  $x < 0$ , la función es constante. En el punto de unión,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0),$$

por lo que hay continuidad. La derivada por la derecha en cero es

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h/h - 1}{h} = 0,$$

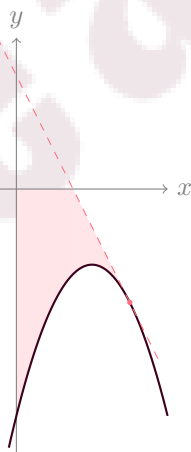
como se deduce de  $\sin h = h - h^3/6 + o(h^3)$ ; por la izquierda, al ser constante, también vale 0. Así, es derivable en todo  $\mathbb{R}$  y

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

### Opción B - Ejercicio 2

La parábola es  $p(x) = -(x-2)^2 - 2 = -x^2 + 4x - 6$ . La tangente en  $x = 3$  tiene pendiente  $p'(3) = -2$  y pasa por  $(3, -3)$ , así que su ecuación es  $y = -2x + 3$ . Esta recta corta al eje  $x$  en  $x = 3/2$ . El recinto se divide en dos partes: entre 0 y  $3/2$ , el eje  $x$  queda por encima de la parábola; entre  $3/2$  y 3, la tangente queda por encima de la parábola. Calculamos ambas áreas:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{3/2} (0 - p(x)) dx + \int_{3/2}^3 ((-2x + 3) - p(x)) dx \\ &= \int_0^{3/2} (x^2 - 4x + 6) dx + \int_{3/2}^3 (x - 3)^2 dx \\ &= \frac{45}{8} + \frac{9}{8} = \boxed{\frac{27}{4}}. \end{aligned}$$



### Opción B - Ejercicio 3

Sean  $v = (1, 2, 3)^t$  y  $w = (x, y, z)^t$ . Las columnas de la matriz son  $kv$ ,  $w$  y  $v + aw$ . Si  $k = 0$ , la primera columna es nula; si  $k \neq 0$ , la tercera es combinación lineal de las dos primeras:

$$v + aw = \frac{1}{k}(kv) + aw.$$

En cualquier caso, las columnas son linealmente dependientes. Por la propiedad de determinantes,  $\boxed{\det A = 0}$  para todos los valores de las variables.

### Opción B - Ejercicio 4

La recta está contenida en el plano  $2x - y = b$  si su vector director es paralelo al plano. Los normales de las dos ecuaciones que definen  $r$  son  $(1, 0, 1)$  y  $(0, 1, -a)$ , así que

$$d = (1, 0, 1) \times (0, 1, -a) = (-1, a, 1).$$

El normal del plano  $\pi$  es  $(2, -1, 0)$ . La condición  $(2, -1, 0) \cdot d = 0$  da  $-2 - a = 0$ , luego  $a = -2$ . Tomando  $z = 0$  en  $r$ , se obtiene el punto  $(-2, 1, 0)$  y entonces  $b = 2(-2) - 1 = -5$ . Por tanto,  $\boxed{a = -2, b = -5}$ . Para construir un plano que contenga  $r$  y sea perpendicular a  $\pi$ , su normal debe ser perpendicular al vector director de  $r$  y al normal de  $\pi$ . El producto vectorial de ambos da  $n = (1, 2, 5)$ . Usando el punto  $(-2, 1, 0)$ :

$$(x + 2) + 2(y - 1) + 5z = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x + 2y + 5z = 0}.$$