

Junio de 2003 · Convocatoria ordinaria

Te explicamos paso a paso los ocho problemas. En el examen se elige el ejercicio A o el B y, dentro de ese ejercicio, se resuelven tres de sus cuatro problemas.

Ejercicio A · Problema 1

El sistema depende del parámetro real λ :

$$\begin{cases} \lambda x + 2z = 0, \\ \lambda y - z = \lambda, \\ x + 3y + z = 5. \end{cases}$$

Su matriz de coeficientes y su matriz ampliada son

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_\lambda^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \lambda \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

a) Discusión por Rouché–Frobenius

Primero calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{aligned} \det A_\lambda &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + 3) - 2\lambda = \lambda(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Preguntamos cuándo se anula:

$$\lambda(\lambda + 1) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ o } \lambda = -1.$$

Caso $\lambda \neq 0, -1$. Como $\det A_\lambda \neq 0$, $\text{rg}(A_\lambda) = 3$. La matriz ampliada contiene las tres columnas de A_λ , por lo que también tiene rango 3. Así,

$$\text{rg}(A_\lambda) = \text{rg}(A_\lambda^*) = 3 = \text{número de incógnitas}.$$

Por Rouché–Frobenius, el sistema es **compatible determinado (SCD)**.

Caso $\lambda = 0$. Sustituimos el valor en las dos matrices:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Las dos primeras filas de cada matriz son dependientes ($F_2 = -\frac{1}{2}F_1$). En A_0 , el menor formado por las filas 1 y 3 y las columnas x, z vale

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A_0) = 2$. En la ampliada las dos primeras filas siguen siendo dependientes y la tercera es independiente, así que $\text{rg}(A_0^*) = 3$. Luego

$$\operatorname{rg}(A_0) = \operatorname{rg}(A_0^*) = 2 < 3.$$

Por Rouché–Frobenius, el sistema es **compatible indeterminado (SCI)**.

Caso $\lambda = -1$. La matriz de coeficientes tiene determinante cero, pero el menor superior izquierdo de orden 2 vale

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

por lo que $\operatorname{rg}(A_{-1}) = 2$. Para la ampliada, tomamos las columnas de x, y y la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Así, $\operatorname{rg}(A_{-1}^*) = 3$, distinto del rango de la matriz de coeficientes. Por Rouché–Frobenius, el sistema es **incompatible (SI)**.

Valor del parámetro	Tipo de sistema
$\lambda \neq 0, -1$	SCD
$\lambda = 0$	SCI
$\lambda = -1$	SI

b) Soluciones en los casos compatibles

Si $\lambda \neq 0, -1$, despejamos las dos primeras ecuaciones:

$$x = -\frac{2z}{\lambda}, \quad y = 1 + \frac{z}{\lambda}.$$

Al sustituirlas en la tercera,

$$-\frac{2z}{\lambda} + 3 + \frac{3z}{\lambda} + z = 5 \implies z \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) = 2 \implies z = \frac{2\lambda}{\lambda + 1}.$$

Por consiguiente,

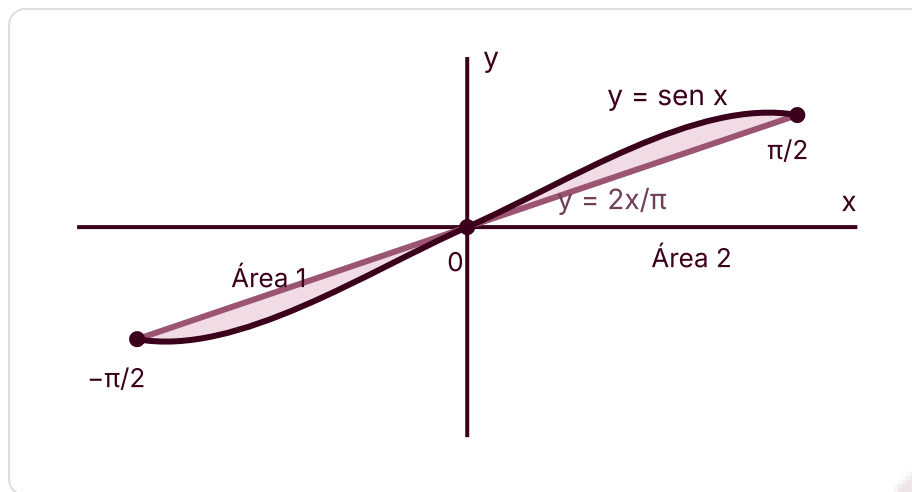
$$(x, y, z) = \left(-\frac{4}{\lambda + 1}, \frac{\lambda + 3}{\lambda + 1}, \frac{2\lambda}{\lambda + 1} \right), \quad \lambda \neq 0, -1.$$

Para $\lambda = 0$, las ecuaciones independientes quedan $z = 0$ y $x + 3y = 5$. Tomamos $y = t$, con $t \in \mathbb{R}$, y obtenemos

$$(x, y, z) = (5 - 3t, t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio A · Problema 2

En $[-\pi/2, \pi/2]$, la recta $y = 2x/\pi$ y la curva $y = \sin x$ se cortan en $-\pi/2, 0$ y $\pi/2$. A la derecha del cero, el seno queda por encima de la recta; a la izquierda, queda por debajo. Por eso sumamos las dos regiones.



a) Área entre la recta y la curva

Integramos «función superior menos función inferior» en cada tramo. En la mitad izquierda la recta queda arriba; en la mitad derecha, queda arriba el seno:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_{-\pi/2}^0 \left(\frac{2}{\pi}x - \sin x \right) dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{\pi} + \cos x \right]_{-\pi/2}^0 \\
 &= 1 - \frac{\pi}{4}, \\
 S_2 &= \int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx \\
 &= \left[-\cos x - \frac{x^2}{\pi} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= 1 - \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Sumamos las dos partes:

$$S = S_1 + S_2 = 2 - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{S = 2 - \frac{\pi}{2} \text{ unidades}^2}.$$

b) Integral definida del producto de las dos funciones

El enunciado pide integrar el producto entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Sacamos la constante y usamos integración por partes, con $u = x$, $dv = \sin x \, dx$, $du = dx$ y $v = -\cos x$:

La fórmula es $\int u \, dv = uv - \int v \, du$. Aplicándola primero a la integral sin límites:

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{\pi} x \sin x \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} [-x \cos x + \sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right) - \left(-\left(-\frac{\pi}{2} \right) \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} (1 - (-1)) = \boxed{\frac{4}{\pi}}.
 \end{aligned}$$

Ejercicio A - Problema 3

Llamamos x a la altura en centímetros y y al peso en kilogramos. Convertimos las alturas de metros a centímetros y conservamos los pesos del enunciado:

$$x = (175, 158, 180, 150, 165, 175, 185, 163), \quad y = (78, 75, 90, 68, 78, 84, 89, 80), \quad n = 8.$$

Sumamos los datos, sus cuadrados y sus productos:

$$\sum x_i = 1351, \quad \sum y_i = 642, \quad \sum x_i^2 = 229133, \quad \sum y_i^2 = 51894, \quad \sum x_i y_i = 108975.$$

Las medias son

$$\bar{x} = \frac{1351}{8} = 168,875 \text{ cm}, \quad \bar{y} = \frac{642}{8} = 80,25 \text{ kg}.$$

Para las rectas de regresión necesitamos las sumas de cuadrados y productos centradas:

$$\begin{aligned}
 S_{xx} &= \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 229133 - \frac{1351^2}{8} = \frac{7863}{8} = 982,875 \text{ cm}^2, \\
 S_{yy} &= \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = 51894 - \frac{642^2}{8} = \frac{747}{2} = 373,5 \text{ kg}^2, \\
 S_{xy} &= \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n} = 108975 - \frac{1351 \cdot 642}{8} = \frac{2229}{4} = 557,25 \text{ cm} \cdot \text{kg}.
 \end{aligned}$$

Comprobamos el coeficiente de correlación:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}} = \frac{557,25}{\sqrt{982,875 \cdot 373,5}} \approx 0,91972.$$

Coincide con **0,9197** del enunciado: la relación es positiva y muy fuerte.

a) Estimar el peso para una altura de 1,72 m

Para estimar el peso a partir de la altura usamos la regresión de y sobre x :

$$\hat{y} = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{S_{xx}}(x - \bar{x}), \quad \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{2229/4}{7863/8} = \frac{1486}{2621} \frac{\text{kg}}{\text{cm}}.$$

La altura indicada equivale a **172** cm. Sustituimos:

$$\begin{aligned}\hat{y}(172) &= 80,25 + \frac{1486}{2621}(172 - 168,875) \\ &= \frac{214979}{2621} \approx 82,0217 \text{ kg} \approx \boxed{82,02 \text{ kg}}.\end{aligned}$$

b) Estimar la altura para un peso de 80 kg

Ahora estimamos la altura a partir del peso, así que usamos la regresión de x sobre y :

$$\hat{x} = \bar{x} + \frac{S_{xy}}{S_{yy}}(y - \bar{y}), \quad \frac{S_{xy}}{S_{yy}} = \frac{2229/4}{747/2} = \frac{743}{498} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}.$$

Sustituimos $y = 80$ kg y convertimos el resultado de centímetros a metros:

$$\begin{aligned}\hat{x}(80) &= 168,875 + \frac{743}{498}(80 - 80,25) \\ &= \frac{41957}{249} \approx 168,502 \text{ cm} = 1,68502 \text{ m} \approx \boxed{1,69 \text{ m}}.\end{aligned}$$

No invertimos la primera recta: usamos cada regresión en el sentido de la variable que queremos estimar.

Ejercicio A · Problema 4

La recta r pasa por $A = (3, 6, 7)$ y $B = (7, 8, 3)$. La recta r' es la intersección de los planos

$$\pi_1 : x - 4y - z = -10, \quad \pi_2 : 3x - 4y + z = -2.$$

a) Ecuaciones paramétricas y posición relativa

El vector director de r se obtiene restando los puntos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, -4) = 2(2, 1, -2).$$

Usamos el director simplificado:

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 6 + t, \\ z = 7 - 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para r' , los normales de los planos son $n_1 = (1, -4, -1)$ y $n_2 = (3, -4, 1)$. Su producto vectorial da la dirección:

$$n_1 \times n_2 = (-8, -4, 8) = -4(2, 1, -2),$$

por tanto las direcciones de r y r' son paralelas. Para hallar un punto de r' , sumamos las ecuaciones de los planos:

$$(x - 4y - z) + (3x - 4y + z) = -10 - 2 \implies 4x - 8y = -12 \implies x = 2y - 3.$$

Elegimos $y = 3$; entonces $x = 3$, y al sustituir en el primer plano obtenemos $z = 1$. Así, $Q = (3, 3, 1)$, que también satisface el segundo plano:

$$3 - 4 \cdot 3 - 1 = -10, \quad 3 \cdot 3 - 4 \cdot 3 + 1 = -2.$$

Con ese punto y el director paralelo, escribimos r' en forma paramétrica:

$$r' : \begin{cases} x = 3 + 2s, \\ y = 3 + s, \\ z = 1 - 2s, \end{cases} s \in \mathbb{R}.$$

Las rectas no coinciden: el punto A no pertenece a r' , pues $3 - 4 \cdot 6 - 7 = -28 \neq -10$. Son, por tanto, **paralelas distintas**.

b) Distancia entre las rectas

Al ser paralelas, calculamos la distancia de $A \in r$ a la recta r' , usando $Q = (3, 3, 1)$ y el vector director $d = (2, 1, -2)$:

$$d(r, r') = \frac{\|\vec{AQ} \times d\|}{\|d\|}.$$

$$\vec{AQ} = Q - A = (0, -3, -6), \quad \vec{AQ} \times d = (12, -12, 6).$$

$$\|\vec{AQ} \times d\| = \sqrt{12^2 + (-12)^2 + 6^2} = 18, \quad \|d\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3.$$

Luego $d(r, r') = 18/3 = 6$.

c) Área del triángulo de vértices A, B, C , con $C \in r'$

La base es el lado AB :

$$|AB| = \|(4, 2, -4)\| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6.$$

Como r y r' son paralelas, la altura desde cualquier punto C de r' hasta la base AB es la distancia entre las rectas, es decir, **6**. Por la fórmula del área de un triángulo,

$$\text{Área}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ unidades}^2.$$

Ejercicio B · Problema 1

Las matrices X, Y satisfacen

$$2X + Y = B, \quad X - 2Y = C,$$

con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular X e Y

Para despejar ambas matrices, combinamos las ecuaciones:

$$2(2X + Y) + (X - 2Y) = 2B + C \quad \Rightarrow \quad X = \frac{2B + C}{5},$$

$$(2X + Y) - 2(X - 2Y) = B - 2C \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{B - 2C}{5}.$$

Calculamos las dos combinaciones entrada a entrada y escribimos las matrices buscadas:

$$2B + C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B - 2C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Calcular $(2X + Y)X - (2X + Y)(2Y)$

Sustituimos $2X + Y = B$. Calculamos por separado los dos productos que aparecen y después los restamos:

$$BX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B(2Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -4 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(2X + Y)X - (2X + Y)(2Y) = BX - B(2Y)$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -4 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio B · Problema 2

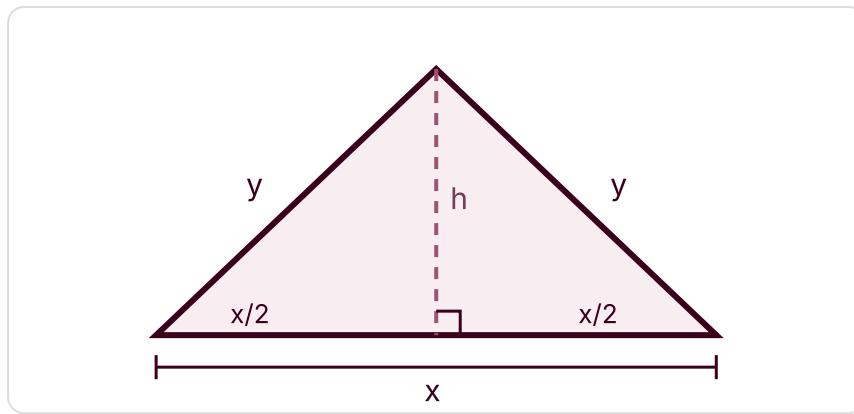
El triángulo tiene perímetro 60 cm. Llamamos x al lado desigual y y a cada uno de los dos lados iguales. Del perímetro,

$$x + 2y = 60 \quad \Rightarrow \quad y = 30 - \frac{x}{2}.$$

La altura parte la base en dos segmentos de longitud $x/2$. Por Pitágoras,

$$h^2 = y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(30 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 900 - 30x,$$

de modo que $h = \sqrt{900 - 30x}$.



a) Expresiones del área $A(x)$ y de $f(x) = [A(x)]^2$

Para que exista el triángulo, $x > 0$ y la suma de los dos lados iguales debe superar a la base: $2y > x$. Al sustituir $y = 30 - x/2$, queda $60 - x > x$, es decir, $x < 30$. Por tanto,

$$\boxed{\text{Dom}(A) = \text{Dom}(f) = (0, 30)}.$$

Comprobamos las asíntotas del modelo f . En los extremos del dominio,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 30^-} f(x) = 0,$$

por lo que no hay asíntotas verticales. El dominio físico está acotado, así que no hay ramas cuando $x \rightarrow \pm\infty$; además, la extensión polinómica crece como $-\frac{15}{2}x^3$, por lo que no tiene asíntota horizontal ni oblicua.

El área es base por altura dividido entre dos, y f es su cuadrado:

$$A(x) = \frac{xh}{2} = \boxed{\frac{x}{2}\sqrt{900 - 30x}},$$

$$f(x) = [A(x)]^2 = \frac{x^2}{4}(900 - 30x) = \boxed{\frac{15}{2}x^2(30 - x)}.$$

b) Valor de x que maximiza $f(x)$

Derivamos la expresión obtenida:

$$f'(x) = \frac{15}{2}(60x - 3x^2) = \frac{45}{2}x(20 - x).$$

Igualamos a cero para localizar los puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = 20.$$

El valor $x = 0$ está fuera del dominio físico; $x = 20$ sí pertenece. Comprobamos el signo de la derivada con un valor a cada lado de 20:

$$f'(10) = \frac{45}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 2250 > 0, \quad f'(25) = \frac{45}{2} \cdot 25 \cdot (-5) = -\frac{5625}{2} < 0.$$

En la tabla incluimos los extremos excluidos y probamos un número dentro de cada intervalo: $10 \in (0, 20)$ y $25 \in (20, 30)$.

x	0	10	20	25	30
En el dominio?	no	sí	sí	sí	no
$\text{sgn } f'(x)$	fuera	+	0	-	fuera
Variación	—	↗	máx.	↘	—

Los extremos **0** y **30** no pertenecen al dominio, así que no son máximos ni mínimos; la función sí crece y decrece, respectivamente, en los intervalos interiores indicados.

La derivada cambia de positiva a negativa en $x = 20$, así que la función pasa de crecer a decrecer: allí alcanza su máximo absoluto en el dominio. Por tanto,

$$\boxed{x = 20 \text{ cm}}.$$

En ese caso los otros lados también miden 20 cm; $A(20) = 100\sqrt{3} \text{ cm}^2$ y $f(20) = 30000 \text{ cm}^4$.

Ejercicio B · Problema 3

En cada lanzamiento, la probabilidad de obtener un 3 es $p = 1/6$, y los cinco lanzamientos son independientes. Si X cuenta cuántas veces aparece el 3,

$$X \sim B\left(5, \frac{1}{6}\right), P(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}.$$

a) Obtener un 3 exactamente dos veces

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ &= 10 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{125}{216} = \frac{625}{3888} \approx \boxed{0,1608}. \end{aligned}$$

b) Obtener un 3 una vez a lo sumo

«Una vez a lo sumo» significa cero o una aparición. Sumamos ambos casos incompatibles:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^5 + 5 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\ &= \frac{3125}{7776} + \frac{3125}{7776} = \frac{3125}{3888} \approx \boxed{0,8038}. \end{aligned}$$

c) Obtener un 3 más de dos veces

Usamos el suceso complementario: «más de dos» es lo contrario de obtenerlo cero, una o dos veces.

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - \left(\frac{3125}{7776} + \frac{3125}{7776} + \frac{1250}{7776}\right) \\ &= \frac{276}{7776} = \boxed{\frac{23}{648} \approx 0,0355}. \end{aligned}$$

Ejercicio B · Problema 4

La recta pasa por $A = (2, 2, 4)$ y $B = (-1, 2, 1)$. El plano pasa por $U = (1, 0, 1)$, $V = (1, -1, 0)$ y $W = (3, 0, 0)$.

Preparación: ecuación general del plano

El director de la recta es

$$d = B - A = (-3, 0, -3) \sim (-1, 0, -1).$$

Dos vectores del plano son

$$\overrightarrow{UV} = (0, -1, -1), \quad \overrightarrow{UW} = (2, 0, -1).$$

Su producto vectorial es un vector normal:

$$n = \overrightarrow{UV} \times \overrightarrow{UW} = (1, -2, 2).$$

Usamos el punto U para escribir la ecuación general:

$$(x - 1) - 2(y - 0) + 2(z - 1) = 0 \implies \boxed{\pi : x - 2y + 2z - 3 = 0}.$$

a) Probar que la recta no es paralela al plano

Una recta es paralela a un plano si su vector director es perpendicular al normal del plano. Calculamos el producto escalar:

$$d \cdot n = (-1, 0, -1) \cdot (1, -2, 2) = -1 - 2 = -3 \neq 0.$$

Por tanto, r no es paralela a π ; se cortan en un punto.

b) Punto de intersección y ángulo

La recta en forma paramétrica es

$$r : \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 2, \\ z = 4 - t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sustituimos sus coordenadas en la ecuación del plano:

$$(2 - t) - 2 \cdot 2 + 2(4 - t) - 3 = 0 \implies 3 - 3t = 0 \implies t = 1.$$

Así, el punto de corte es

$$\boxed{P = (1, 2, 3)}.$$

El ángulo θ entre una recta y un plano se calcula con el director de la recta y el normal del plano:

$$\sin \theta = \frac{|d \cdot n|}{\|d\| \|n\|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Como $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, resulta $\boxed{\theta = 45^\circ}$.

c) Puntos de la recta cuya distancia al plano es 4

Un punto cualquiera de la recta es $R(t) = (2 - t, 2, 4 - t)$. La distancia de (x_0, y_0, z_0) al plano $ax + by + cz + D = 0$ es

$$d((x_0, y_0, z_0), \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + D|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Sustituimos $R(t)$, imponemos la distancia pedida y resolvemos los dos casos del valor absoluto:

$$d(R(t), \pi) = \frac{|(2 - t) - 2 \cdot 2 + 2(4 - t) - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = |1 - t|,$$

$$d(R(t), \pi) = 4 \iff |1 - t| = 4,$$

$$\iff 1 - t = 4 \text{ o } 1 - t = -4,$$

$$\iff t = -3 \text{ o } t = 5,$$

$$t = -3 \implies S = R(-3) = (5, 2, 7),$$

$$t = 5 \implies T = R(5) = (-3, 2, -1).$$

Por tanto, los puntos buscados son $S = (5, 2, 7)$, $T = (-3, 2, -1)$.