

Julio de 2023 - Convocatoria extraordinaria

El examen ofrece ocho problemas; se deben contestar cuatro. Aquí se resuelven los ocho, explicando las herramientas y los cálculos.

Problema 1. Discusión de un sistema con parámetro

El sistema es

$$\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Sea A_a la matriz de coeficientes y A_a^* la matriz ampliada. Aplicaremos Rouché-Frobenius: el sistema es compatible si $\text{rg}(A_a) = \text{rg}(A_a^*)$; será determinado si ese rango común es 3 e indeterminado si es menor que 3.

Primero calculamos el determinante para saber cuándo puede bajar el rango:

$$\begin{aligned} \det A_a &= 2(a(a+2) - 2) - (a+1)((a+2) - 2) + (1-a) \\ &= 2a^2 + 4a - 4 - a^2 - a + 1 - a \\ &= a^2 + 2a - 3 = (a-1)(a+3). \end{aligned}$$

Caso 1: $a \neq 1$ y $a \neq -3$. Como $\det A_a \neq 0$, existe un menor de orden 3 no nulo y

$$\text{rg}(A_a) = 3.$$

La ampliada tiene solo tres filas y contiene a A_a , así que su rango también es 3:

$$\text{rg}(A_a^*) = 3 = \text{rg}(A_a).$$

Por Rouché-Frobenius, el sistema es **compatible determinado (SCD)**.

Caso 2: $a = 1$. La matriz de coeficientes es

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es cero. El menor de orden 2 formado por las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 3 vale

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0,$$

por tanto $\text{rg}(A_1) = 2$. Además, las filas cumplen

$$F_1 - 5F_2 + 3F_3 = (0, 0, 0).$$

La misma combinación en los términos independientes da $-1 - 5(1) + 3(2) = 0$; no aparece una tercera fila independiente al ampliar. Así,

$$\text{rg}(A_1^*) = 2 = \text{rg}(A_1) < 3,$$

y el sistema es **compatible indeterminado (SCI)**. Para obtener sus soluciones restamos la segunda ecuación de la tercera:

$$(x + y + 3z) - (x + y + 2z) = 2 - 1 \implies z = 1.$$

La segunda ecuación da $x + y + 2 = 1$, es decir, $x + y = -1$. Por tanto, con $t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{x = t, \quad y = -1 - t, \quad z = 1.}$$

Caso 3: $\alpha = -3$. Ahora

$$A_{-3} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

El menor de orden 2 de las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 3 es

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

así que $\text{rg}(A_{-3}) = 2$. En cambio, el menor de orden 3 de la ampliada que usa las columnas de x, y y los términos independientes es

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

Luego $\text{rg}(A_{-3}^*) = 3 > 2 = \text{rg}(A_{-3})$, y por Rouché-Frobenius el sistema es **incompatible (SI)**.

En conclusión: SCD para $\alpha \neq 1, -3$, SCI para $\alpha = 1$ y SI para $\alpha = -3$. El único caso con infinitas soluciones es $\alpha = 1$, cuya solución general se ha obtenido arriba.

Problema 2. Potencia de una matriz con parámetro

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $M = (A - \alpha I)^2$. Usamos la identidad matricial $(A - \alpha I)^2 = A^2 - 2\alpha A + \alpha^2 I$. Primero multiplicamos A por sí misma:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculamos por separado los otros dos sumandos:

$$-2\alpha A = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 4\alpha \\ 0 & -2\alpha & 0 \\ -2\alpha & -2\alpha & -6\alpha \end{pmatrix}, \alpha^2 I = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Al sumarlos entrada a entrada,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 2 & 2\alpha - 3 & 4\alpha - 6 \\ 0 & (\alpha - 1)^2 & 0 \\ 3 - 2\alpha & 3 - 2\alpha & \alpha^2 - 6\alpha + 7 \end{pmatrix}.$$

b) ¿Hay algún valor de α que haga M nula? Para que una matriz sea nula, todas sus entradas deben ser cero. La entrada central exigirá

$$(\alpha - 1)^2 = 0 \implies \alpha = 1.$$

Pero con ese valor la entrada de la primera fila y segunda columna es

$$2\alpha - 3 = 2(1) - 3 = -1 \neq 0.$$

Las condiciones no pueden cumplirse simultáneamente: **no existe ningún valor real de α para el que M sea la matriz nula.**

Problema 3. Recta, plano perpendicular y distancia

Sean $A = (2, -1, 0)$, $B = (1, 2, 3)$ y $C = (-1, 0, 0)$.

a) Recta que pasa por A y B . El vector director se obtiene restando los puntos:

$$\vec{d} = B - A = (1 - 2, 2 - (-1), 3 - 0) = (-1, 3, 3).$$

Tomando A como punto de paso, la recta en forma paramétrica es

$$\boxed{x = 2 - t, y = -1 + 3t, z = 3t, t \in \mathbb{R}.$$

Al sustituir $t = 0$ se obtiene A , y con $t = 1$ se obtiene B .

b) Plano perpendicular a la recta que pasa por C . Si un plano es perpendicular a una recta, un vector director de la recta sirve como vector normal del plano. Usamos $\vec{n} = (-1, 3, 3)$ y la forma general

$$n_1x + n_2y + n_3z + d = 0.$$

Como el plano pasa por $C = (-1, 0, 0)$,

$$-1(x - (-1)) + 3(y - 0) + 3(z - 0) = 0 \implies \boxed{-x + 3y + 3z - 1 = 0.}$$

c) Distancia de A al plano. Para un plano $ax + by + cz + d = 0$, la distancia de (x_0, y_0, z_0) es

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Sustituimos el plano $-x + 3y + 3z - 1 = 0$ y el punto $A = (2, -1, 0)$:

$$d(A, \pi) = \frac{|-2 - 3 + 0 - 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{19}} \approx 1.3765.$$

Problema 4. Posición relativa de una recta y un plano

La recta dada se escribe en paramétricas como

$$r: x = 1 - \lambda, y = 1 - \lambda, z = 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R},$$

y el plano es $\pi: 5x + my + z - 2 = 0$.

a) Posición relativa según m . El vector director de r es $\vec{d} = (-1, -1, 2)$, y el normal de π es $\vec{n} = (5, m, 1)$. La recta es paralela al plano cuando

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = (-1)5 + (-1)m + 2(1) = -m - 3 = 0,$$

es decir, cuando $m = -3$. Comprobamos si entonces la recta está contenida o es estrictamente paralela: el punto de la recta $P = (1, 1, 0)$ verifica el plano para $m = -3$, pues

$$5(1) - 3(1) + 0 = 2.$$

Por tanto, para $m = -3$ la recta está contenida en el plano. Si $m \neq -3$, el producto escalar no es cero y la recta lo corta en un único punto. En conclusión: **contenida si $m = -3$; secante si $m \neq -3$; no hay ningún caso paralelo exterior.**

b) Plano π' que contiene a r y es perpendicular a π , para $m = 1$. En este caso $\vec{n} = (5, 1, 1)$. El normal $\vec{n}'$ de π' debe ser perpendicular tanto a $\vec{d}$ como a $\vec{n}$; tomamos su producto vectorial:

$$\vec{n}' = \vec{d} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 11, 4).$$

Usamos el punto $P = (1, 1, 0)$ de la recta en la ecuación general del plano:

$$-3(x - 1) + 11(y - 1) + 4z = 0 \implies \boxed{-3x + 11y + 4z - 8 = 0.}$$

Se comprueba que $\vec{n}' \cdot \vec{d} = 0$ y $\vec{n}' \cdot \vec{n} = 0$, así que π' contiene a la recta y es perpendicular a π .

Problema 5. Discontinuidad, monotonía e integral

La función es

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}.$$

Factorizamos numerador y denominador antes de estudiar la función:

$$-2x^2 + x + 1 = (2x + 1)(1 - x), \quad 2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2).$$

El denominador original se anula en $x = -\frac{1}{2}$ y $x = -2$; por eso

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}.$$

Para los demás valores de x , se simplifica a

$$f(x) = \frac{1-x}{x+2} = -1 + \frac{3}{x+2}.$$

a) Discontinuidad evitable en $x = -\frac{1}{2}$. El límite existe y es finito:

$$\lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) = \frac{1 - (-1/2)}{-1/2 + 2} = \frac{3/2}{3/2} = 1.$$

La función no está definida allí, pero su límite vale 1; por tanto, $x = -\frac{1}{2}$ es una **discontinuidad evitable**. Se eliminaría definiendo $f(-\frac{1}{2}) = 1$.

Comprobamos también las asíntotas. En $x = -2$, el numerador de la forma simplificada tiende a 3 y el denominador a cero; así,

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty,$$

de modo que $x = -2$ es asíntota vertical. El agujero de $x = -\frac{1}{2}$ no es una asíntota porque el límite es finito. En los dos infinitos,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-1 + \frac{3}{x+2}\right) = -1,$$

por lo que $y = -1$ es asíntota horizontal. No hay asíntota oblicua, pues ya existe asíntota horizontal.

b) Crecimiento y decrecimiento. En cada intervalo del dominio derivamos la expresión simplificada:

$$f'(x) = \frac{-(x+2) - (1-x)}{(x+2)^2} = -\frac{3}{(x+2)^2}.$$

El denominador es positivo salvo en $x = -2$, que no pertenece al dominio, y el numerador es siempre negativo. Comprobamos el signo con un valor de prueba en cada intervalo:

Intervalo	Prueba en $f'(x)$	Signo	Comportamiento
$(-\infty, -2)$	$x = -3 : -3$	-	Decreciente
$(-2, -\frac{1}{2})$	$x = -1 : -3$	-	Decreciente
$(-\frac{1}{2}, +\infty)$	$x = 0 : -\frac{3}{4}$	-	Decreciente

La derivada no se anula, así que no hay máximos ni mínimos interiores. La función es decreciente en cada intervalo de su dominio.

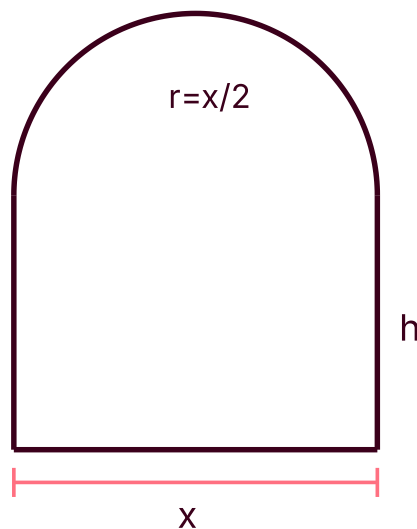
c) Primitiva. Reescribimos la función como suma de una constante y una fracción simple, y desarrollamos la integral:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(-1 + \frac{3}{x+2}\right) dx \\ &= -\int 1 dx + 3 \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \boxed{-x + 3 \ln|x+2| + C.} \end{aligned}$$

La fórmula vale en cada intervalo del dominio; la constante de integración puede elegirse de forma independiente en cada componente.

Problema 6. Ventana rectangular coronada por un semicírculo

Sea $x > 0$ la anchura de la ventana, que también es el diámetro del semicírculo, y sea h la altura de la parte rectangular. Entonces el radio del semicírculo es $r = x/2$.



a) Área en función de la anchura. El perímetro exterior está formado por la base x , los dos lados verticales $2h$ y el arco del semicírculo, cuya longitud es $\pi r = \pi x/2$. Aplicamos el dato de 20 m:

$$x + 2h + \frac{\pi x}{2} = 20 \implies h = 10 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}.$$

El área total es la suma del rectángulo y el semicírculo:

$$\begin{aligned} S(x) &= xh + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ &= x\left(10 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}\right) + \frac{\pi x^2}{8} \\ &= 10x - \frac{4+\pi}{8}x^2. \end{aligned}$$

Para que la ventana exista, $x > 0$ y $h > 0$:

$$10 - \frac{2+\pi}{4}x > 0 \implies 0 < x < \frac{40}{2+\pi}.$$

b) Dimensiones de máxima entrada de luz. Derivamos y buscamos los puntos críticos dentro del dominio:

$$S'(x) = 10 - \frac{4+\pi}{4}x = 0 \implies x = \frac{40}{4+\pi}.$$

Este valor está en el dominio porque $4 + \pi > 2 + \pi$. Verificamos el signo de la derivada a ambos lados del punto crítico:

Intervalo	Prueba en $S'(x)$	Signo	Comportamiento
$(0, \frac{40}{4+\pi})$	$x = \frac{20}{4+\pi} : 5$	+	Creciente
$(\frac{40}{4+\pi}, \frac{40}{2+\pi})$	$x = \frac{50}{4+\pi} : -\frac{5}{2}$	-	Decreciente

La derivada cambia de positiva a negativa, así que el área alcanza un máximo. La anchura óptima es $x = 40/(4 + \pi)$. La altura rectangular correspondiente es

$$h = 10 - \frac{20}{4+\pi} - \frac{10\pi}{4+\pi} = \frac{20}{4+\pi}.$$

$$\text{anchura} = \frac{40}{4+\pi} \approx 5.6010 \text{ m, altura del rectángulo} = \frac{20}{4+\pi} \approx 2.8005 \text{ m.}$$

El semicírculo tiene diámetro igual a la anchura y radio $20/(4 + \pi)$ m.

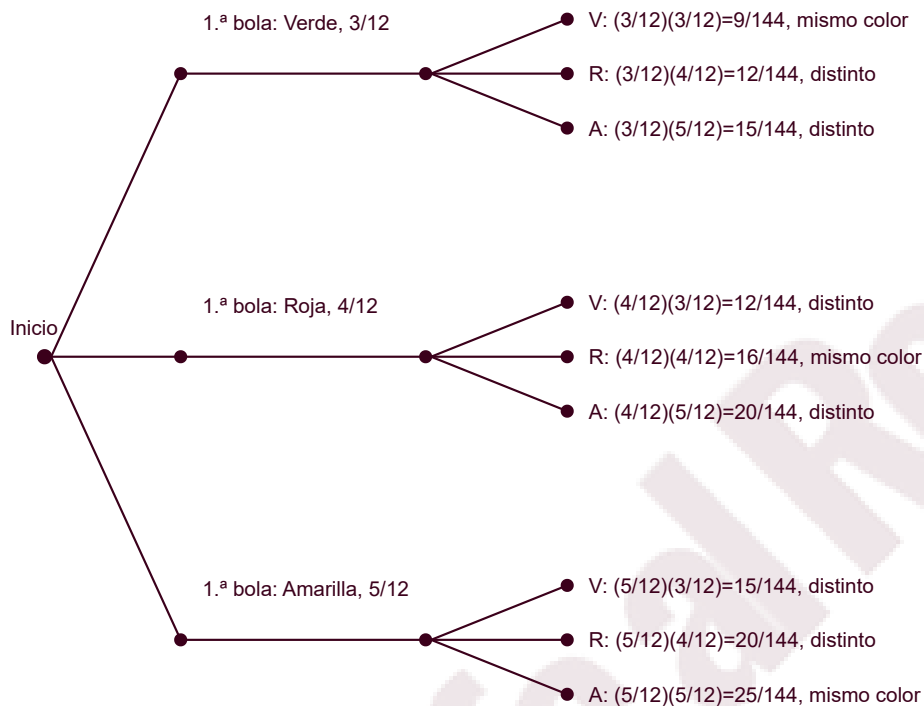
c) **Área máxima.** Sustituimos la anchura óptima en la función de área:

$$S_{\max} = 10 \left(\frac{40}{4 + \pi} \right) - \frac{4 + \pi}{8} \left(\frac{40}{4 + \pi} \right)^2 = \frac{200}{4 + \pi} \approx 28.0050 \text{ m}^2.$$

Problema 7. Extracciones de bolas de una urna

La urna contiene 3 bolas verdes (V), 4 rojas (R) y 5 amarillas (A), en total $3 + 4 + 5 = 12$ bolas.

a) **Dos extracciones con devolución.** Como se devuelve la primera bola, las probabilidades de color son las mismas en las dos extracciones. En cada ruta del árbol multiplicamos la probabilidad de la primera bola por la de la segunda; luego sumamos las rutas incompatibles que nos interesan.



La probabilidad de repetir color suma las tres rutas diagonales del árbol:

$$\begin{aligned} P(\text{mismo color}) &= \left(\frac{3}{12} \right)^2 + \left(\frac{4}{12} \right)^2 + \left(\frac{5}{12} \right)^2 \\ &= \frac{9}{144} + \frac{16}{144} + \frac{25}{144} = \frac{25}{72} \approx 0.3472. \end{aligned}$$

Los sucesos "mismo color" y "distinto color" son complementarios, así que

$$P(\text{distinto color}) = 1 - \frac{25}{72} = \frac{47}{72} \approx 0.6528.$$

b) **Tres bolas simultáneamente, una de cada color.** Al extraerlas a la vez no importa el orden. Hay $\binom{12}{3}$ ternas posibles. Los casos favorables se forman eligiendo una verde, una roja y una amarilla:

$$N_{\text{favorables}} = \binom{3}{1} \binom{4}{1} \binom{5}{1} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60, \quad N_{\text{posibles}} = \binom{12}{3} = 220.$$

Por la regla de Laplace,

$$P(\text{tres colores distintos}) = \frac{60}{220} = \frac{3}{11} \approx 0.2727.$$

Problema 8. Defectos de dos plantas de producción

Definimos P_1 : móvil de la primera planta; P_2 : móvil de la segunda; D : móvil defectuoso. Como solo hay dos plantas,

$$P(P_1) = 0.7 = \frac{7}{10}, \quad P(P_2) = 1 - 0.7 = 0.3 = \frac{3}{10}.$$

Las probabilidades condicionadas son $P(D | P_1) = 0.02 = 1/50$ y $P(D | P_2) = 0.06 = 3/50$. Las ramas del árbol muestran primero la planta y después el estado del móvil; para una ruta completa multiplicamos las probabilidades de sus ramas.



a) **Procede de la segunda planta y es defectuoso.** Corresponde a la rama conjunta $P_2 \cap D$:

$$P(P_2 \cap D) = P(P_2)P(D | P_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{50} = \boxed{\frac{9}{500} = 0.0180.}$$

b) **Sabiendo que es defectuoso, probabilidad de que proceda de la primera planta.** Primero sumamos las dos rutas defectuosas para obtener la probabilidad total de defecto:

$$P(D) = P(P_1)P(D | P_1) + P(P_2)P(D | P_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{50} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{50} = \frac{7}{500} + \frac{9}{500} = \frac{16}{500} = \frac{4}{125}.$$

Aplicamos Bayes, dividiendo la probabilidad conjunta de primera planta y defecto por la probabilidad total de defecto:

$$P(P_1 | D) = \frac{P(P_1)P(D | P_1)}{P(D)} = \frac{7/500}{16/500} = \boxed{\frac{7}{16} = 0.4375.}$$