

Junio de 2026 · Convocatoria ordinaria

Solución pedagógica completa. El examen consta de cuatro bloques temáticos (Probabilidad y estadística, Álgebra, Geometría y Análisis), permitiendo en los bloques 2, 3 y 4 escoger entre dos opciones alternativas. Para ofrecer un recurso de estudio y preparación exhaustivo para el alumno, en este documento se resuelven detalladamente todos los apartados de ambas opciones.

Pregunta 1 · Probabilidad y estadística

En un país se ha detectado una enfermedad X transmitida por el virus VirusX. La enfermedad la padece el **20%** de la población. Para detectarla se usa un test de antígenos que, entre personas enfermas da positivo en el **90%** de los casos y entre personas sanas da positivo en el **5%** de los casos.

Definimos formalmente el espacio muestral y los sucesos del problema: - D : «la persona seleccionada padece la enfermedad transmitida por VirusX». - $\bar{D}$: «la persona seleccionada está sana (no padece la enfermedad)». - $+$: «el test de antígenos arroja un resultado positivo». - $-$: «el test de antígenos arroja un resultado negativo».

A partir de los datos del enunciado, identificamos las siguientes probabilidades:

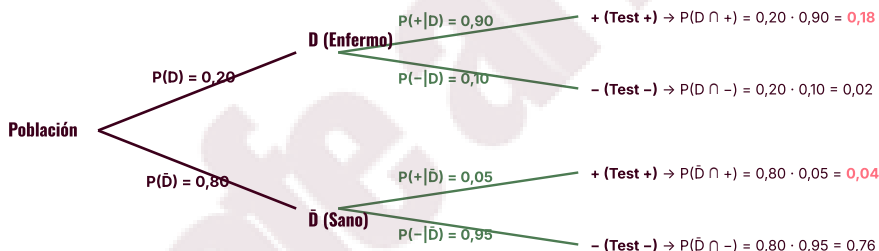
$$P(D) = 0,20 \implies P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,20 = 0,80.$$

Las probabilidades condicionadas del comportamiento del test son:

$$P(+ | D) = 0,90 \implies P(- | D) = 1 - 0,90 = 0,10,$$

$$P(+ | \bar{D}) = 0,05 \implies P(- | \bar{D}) = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Representamos la situación mediante un árbol de probabilidad donde cada rama indica la probabilidad condicionada correspondiente y al final de cada camino se calcula la probabilidad conjunta multiplicando las probabilidades de sus tramos:



1.1

Nos piden calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona seleccionada al azar en el país, dicho test resulte positivo, es decir, $P(+)$.

Aplicamos el **Teorema de la Probabilidad Total**, considerando que $\{D, \bar{D}\}$ constituye una partición del espacio muestral:

$$P(+) = P(D) \cdot P(+ | D) + P(\bar{D}) \cdot P(+ | \bar{D}).$$

Sustituimos los valores numéricos obtenidos del enunciado:

$$P(+) = 0,20 \cdot 0,90 + 0,80 \cdot 0,05 = 0,18 + 0,04 = 0,22.$$

Conclusión: La probabilidad de que el test dé positivo al realizarlo a una persona seleccionada al azar es **0,22** (es decir, un **22%**).

1.2

Nos piden calcular la probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test de antígenos, es decir, la probabilidad condicionada $P(\bar{D} | +)$.

Aplicamos la definición de probabilidad condicionada y el **Teorema de Bayes**:

$$P(\bar{D} | +) = \frac{P(\bar{D} \cap +)}{P(+)} = \frac{P(\bar{D}) \cdot P(+ | \bar{D})}{P(+)}.$$

Sustituimos la probabilidad de la intersección calculada en el árbol y la probabilidad total de positivo obtenida en el apartado anterior:

$$P(\bar{D} | +) = \frac{0,80 \cdot 0,05}{0,22} = \frac{0,04}{0,22} = \frac{4}{22} = \frac{2}{11} \approx 0,1818.$$

Conclusión: La probabilidad de que la persona esté realmente sana habiendo obtenido un resultado positivo en el test es $\frac{2}{11} \approx 0,1818$ (aproximadamente un 18,18%).

1.3

Se seleccionan 8 personas de la población al azar. Nos piden la probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad.

Definimos la variable aleatoria:

$X =$ «número de personas que padecen la enfermedad entre las 8 seleccionadas».

Comprobamos que X se ajusta a una **distribución binomial**: 1. Se realizan $n = 8$ repeticiones o ensayos idénticos e independientes (la selección es aleatoria en una población suficientemente amplia). 2. En cada ensayo solo existen dos resultados posibles: tener la enfermedad (éxito, D) o no tenerla (fracaso, $\bar{D}$). 3. La probabilidad de tener la enfermedad se mantiene constante para cada persona: $p = P(D) = 0,20$, con probabilidad complementaria $q = 1 - p = 0,80$.

Por tanto, $X \sim B(n = 8, p = 0,20)$. La función de probabilidad viene dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{8}{k} (0,20)^k (0,80)^{8-k}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}.$$

El suceso «como máximo dos personas estén enfermas» equivale a $X \leq 2$, cuya probabilidad es la suma de probabilidades de los casos incompatibles $X = 0$, $X = 1$ y $X = 2$:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2).$$

Calculamos cada término por separado: - Para $k = 0$:

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} (0,20)^0 (0,80)^8 = 1 \cdot 1 \cdot (0,80)^8 = 0,16777216 = \frac{65536}{390625}.$$

- Para $k = 1$:

$$P(X = 1) = \binom{8}{1} (0,20)^1 (0,80)^7 = 8 \cdot 0,20 \cdot (0,80)^7 = 1,6 \cdot 0,2097152 = 0,33554432 = \frac{131072}{390625}.$$

- Para $k = 2$:

$$P(X = 2) = \binom{8}{2} (0,20)^2 (0,80)^6 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 0,04 \cdot 0,262144 = 28 \cdot 0,04 \cdot 0,262144 = 0,29360128 = \frac{114688}{390625}.$$

Sumamos los tres resultados:

$$P(X \leq 2) = 0,16777216 + 0,33554432 + 0,29360128 = 0,79691776 = \frac{311296}{390625} \approx 0,7969.$$

Conclusión: La probabilidad de que como máximo dos de las ocho personas tengan la enfermedad es

exactamente $\frac{311296}{390625} \approx 0,7969$ (es decir, un 79,69%).

Pregunta 2 · Álgebra

Opción 2.1

El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de la matriz cuadrada T de orden 3. El vector tensión en la dirección de v viene dado por $U = Tv$, donde:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

2.1.1 · Discusión del sistema según el parámetro m

El sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ se expresa en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La matriz de coeficientes T y la matriz ampliada T^* son:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & 0 & 4 \\ m & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right).$$

Calculamos primero el determinante de la matriz de coeficientes T , desarrollando por los elementos de la tercera fila:

$$\det(T) = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & m \\ m & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - m \cdot m = 4 - m^2.$$

Nos preguntamos explícitamente: ¿para qué valores del parámetro real m se anula este determinante?

$$\det(T) = 0 \iff 4 - m^2 = 0 \iff m^2 = 4 \iff m = \pm 2.$$

Distinguimos los siguientes casos mediante el **Teorema de Rouché-Frobenius**:

Caso 1: Valores distintos a los que anulan el determinante ($m \neq 2$ y $m \neq -2$). - Como $\det(T) \neq 0$, el rango de la matriz de coeficientes es máximo: $\text{rg}(T) = 3$. - Como la matriz ampliada T^* tiene orden 3×4 , su rango máximo posible es 3 , por lo que necesariamente $\text{rg}(T^*) = 3$. - El número de incógnitas del sistema es $n = 3$. - Según el Teorema de Rouché-Frobenius, al coincidir los rangos con el número de incógnitas ($\text{rg}(T) = \text{rg}(T^*) = n = 3$), el sistema es **Compatible Determinado (SCD)** y tiene **solución única** para cada $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Caso 2: $m = 2$ (el determinante se anula). Sustituimos $m = 2$ en las matrices del sistema:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right).$$

- Como $\det(T) = 0$, sabemos que $\text{rg}(T) < 3$. Buscamos un menor de orden 2 no nulo dentro de T :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2 \neq 0 \implies \text{rg}(T) = 2.$$

- Para determinar el rango de T^* , observamos que la primera fila y la segunda fila de T^* son idénticas: $(2, 2, 0, 4) = (2, 2, 0, 4)$. Cualquier menor de orden 3 que contenga ambas filas vale automáticamente cero. El único menor de orden 3 formado por las columnas 1, 3 y 4 también contiene estas dos filas iguales:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Por consiguiente, todos los menores de orden 3 de T^* son nulos, lo que demuestra que $\text{rg}(T^*) = 2$. - Según el Teorema de Rouché-Frobenius, como $\text{rg}(T) = \text{rg}(T^*) = 2 < n = 3$, el sistema es **Compatible Indeterminado (SCI)** y posee **infinitas soluciones** dependientes de $3 - 2 = 1$ parámetro libre.

Caso 3: $m = -2$ (el determinante se anula). Sustituimos $m = -2$ en las matrices del sistema:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right).$$

- En T , como $\det(T) = 0$, el rango es menor que 3. Encontramos el mismo menor de orden 2 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{rg}(T) = 2.$$

- En T^* , orlamos dicho menor con la columna de términos independientes (tomando las columnas 1, 3 y 4 de T^*):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 4 - (-2) \cdot 4) = -1 \cdot (8 + 8) = -16 \neq 0.$$

Al existir un menor de orden 3 no nulo en T^* , se concluye que $\text{rg}(T^*) = 3$. - Según el Teorema de Rouché-Frobenius, como $\text{rg}(T) = 2 \neq \text{rg}(T^*) = 3$, el sistema es **Incompatible (SI)** y **no tiene ninguna solución**.

Conclusión: - Si $m \neq \pm 2$: Sistema Compatible Determinado (solución única). - Si $m = 2$: Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones). - Si $m = -2$: Sistema Incompatible (no existe solución).

2.1.2 · Resolución del sistema para $m = -1$

Para $m = -1$, al ser un valor distinto de ± 2 , el sistema es Compatible Determinado y posee solución única. Sustituimos $m = -1$ en el sistema matricial $Tv = u$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

De la tercera ecuación obtenemos de forma inmediata:

$$z = -2.$$

Resolvemos el sistema lineal de dos incógnitas formado por las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & \text{(Ecuación 1)} \\ -x + 2y = 4 & \text{(Ecuación 2)} \end{cases}$$

Multiplicamos la Ecuación 2 por 2 para eliminar la incógnita x por reducción:

$$-2x + 4y = 8.$$

Sumamos la Ecuación 1 y la ecuación resultante:

$$(2x - y) + (-2x + 4y) = 4 + 8 \implies 3y = 12 \implies y = \frac{12}{3} = 4.$$

Sustituimos el valor $y = 4$ en la Ecuación 1 para despejar x :

$$2x - 4 = 4 \implies 2x = 8 \implies x = \frac{8}{2} = 4.$$

Comprobamos en la Ecuación 2: $-4 + 2(4) = -4 + 8 = 4$, verificación que confirma los cálculos.

Conclusión: Para $m = -1$, la solución única del sistema es $(x, y, z) = (4, 4, -2)$.

2.1.3 · Tensiones principales para $m = 2$

Las tensiones principales son los autovalores o valores propios reales λ de la matriz T , definidos por la condición $\det(T - \lambda I) = 0$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Para $m = 2$, planteamos la matriz $T - \lambda I$:

$$T - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante desarrollando por los elementos de la tercera fila (o columna):

$$\det(T - \lambda I) = (1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) [(2 - \lambda)^2 - 2^2].$$

Desarrollamos la expresión del corchete:

$$(2 - \lambda)^2 - 4 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4).$$

Igualamos el determinante a cero:

$$\det(T - \lambda I) = (1 - \lambda)\lambda(\lambda - 4) = 0.$$

Cada factor igualado a cero proporciona un autovalor real: 1. $1 - \lambda = 0 \implies \lambda = 1$. 2. $\lambda = 0$. 3. $\lambda - 4 = 0 \implies \lambda = 4$.

Conclusión: Las tensiones principales para $m = 2$ son $\lambda = 4, \lambda = 1, \lambda = 0$.

Opción 2.2

Una matriz cuadrada es ortogonal cuando su inversa coincide con su transpuesta: $M^{-1} = M^T$, lo que equivale a la condición $M^T M = I$.

2.2.1 · Ortogonalidad de la matriz A para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Dada la matriz de orden 2:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Hallamos su matriz transpuesta A^T intercambiando filas por columnas:

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Calculamos el producto matricial $A^T A$ realizando las operaciones elemento a elemento:

$$A^T A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

donde: - $c_{11} = \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (-\sin \alpha) \cdot (-\sin \alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. -

$c_{12} = \cos \alpha \cdot \sin \alpha + (-\sin \alpha) \cdot \cos \alpha = \cos \alpha \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = 0$. -

$c_{21} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha \sin \alpha = 0$. -

$c_{22} = \sin \alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Por la identidad fundamental de la trigonometría, $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ para cualquier número real α . Así obtenemos:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Conclusión: Como $A^T A = I$, se cumple que $A^{-1} = A^T$, demostrando que A es ortogonal para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.2.2 · Valores de a y b para que B sea ortogonal

Dada la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su matriz transpuesta B^T :

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el producto $B^T B$ término a término:

$$B^T B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + b \cdot b & 0 & 0 \cdot a + 0 \cdot 0 + b \cdot 0 \\ 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \\ a \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot b & 0 & a \cdot a + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Para que B sea ortogonal, exigimos la igualdad $B^T B = I_3$:

$$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b^2 = 1 \implies b = \pm 1, \\ a^2 = 1 \implies a = \pm 1. \end{cases}$$

Los valores posibles para los parámetros reales son $a \in \{-1, 1\}$ y $b \in \{-1, 1\}$. Las combinaciones ordenadas (a, b) son cuatro: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$.

Conclusión: Los valores exigidos son $a \in \{-1, 1\}$ y $b \in \{-1, 1\}$, existiendo exactamente **4** matrices ortogonales de esta forma.

2.2.3 · Resolución de la ecuación matricial $BX + M = N$

Nos piden resolver la ecuación matricial para la incógnita X :

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Llamamos a las matrices constantes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación queda $BX + M = N$. Despejamos la incógnita X mediante operaciones matriciales paso a paso: 1. Restamos la matriz M en ambos miembros:

$$BX = N - M.$$

2. Como B es ortogonal, posee matriz inversa y coincide con su transpuesta: $B^{-1} = B^T$. Multiplicamos por la izquierda por B^{-1} :

$$B^{-1}(BX) = B^{-1}(N - M) \implies I \cdot X = B^T(N - M) \implies X = B^T(N - M).$$

Realizamos cada cálculo por separado:

Paso 1: Cálculo de la diferencia $N - M$.

$$N - M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-0 \\ 0-0 & 2-1 \\ 1-1 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Paso 2: Matriz B^T .

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \{-1, 1\}.$$

Paso 3: Producto $X = B^T(N - M)$. Multiplicamos la matriz B^T (orden 3×3) por $N - M$ (orden 3×2), obteniendo una matriz de orden 3×2 :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

Calculamos cada entrada individualmente: - Fila 1: - $x_{11} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$. -

$x_{12} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + b \cdot (-1) = -b$. - Fila 2: - $x_{21} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$. -

$x_{22} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 1$. - Fila 3: - $x_{31} = a \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a$. - $x_{32} = a \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = a$.

Reuniendo las entradas, obtenemos:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}.$$

Conclusión: La solución de la ecuación matricial es

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \{-1, 1\}.$$

Pregunta 3 · Geometría

Opción 3.1

Dada la recta r en su ecuación continua y el plano π en su ecuación general:

$$r : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}, \quad \pi : 2x + my + z - 3 = 0.$$

Pasamos de forma inmediata la recta r a su **ecuación paramétrica**, identificando un punto de paso $P_r(0, -1, 1)$ y su vector director $\vec{v}_r = (2, -1, 1)$:

$$r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}).$$

El plano π ya viene expresado en su **ecuación general** $\pi : 2x + my + z - 3 = 0$, cuyo vector normal es:

$$\vec{n}_\pi = (2, m, 1).$$

3.1.1 · Valor de m para que π y r sean perpendiculares

La recta r y el plano π son perpendiculares si y solo si el vector director de la recta $\vec{v}_r$ y el vector normal del plano $\vec{n}_\pi$ tienen la misma dirección (son vectores paralelos o linealmente dependientes):

$$r \perp \pi \iff \vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi.$$

Para que dos vectores sean paralelos, sus coordenadas deben ser directamente proporcionales:

$$\frac{2}{2} = \frac{-1}{m} = \frac{1}{1}.$$

De la igualdad $1 = \frac{-1}{m} = 1$, despejamos:

$$m = -1.$$

Conclusión: La recta r y el plano π son perpendiculares si y solo si $m = -1$.

3.1.2 · Valor de m para que π y r sean paralelos

La recta r y el plano π son paralelos si y solo si el vector director de la recta $\vec{v}_r$ es perpendicular al vector normal del plano $\vec{n}_\pi$, y la recta no está contenida en el plano:

$$r \parallel \pi \iff \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \text{ y } P_r \notin \pi.$$

La condición de ortogonalidad entre vectores equivale a que su producto escalar sea nulo:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0.$$

Sustituimos las componentes y desarrollamos el producto escalar:

$$(2, -1, 1) \cdot (2, m, 1) = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot m + 1 \cdot 1 = 4 - m + 1 = 5 - m = 0 \implies m = 5.$$

Comprobamos si para $m = 5$ la recta está contenida o es estrictamente paralela, sustituyendo el punto $P_r(0, -1, 1)$ en la ecuación del plano $\pi : 2x + 5y + z - 3 = 0$:

$$2(0) + 5(-1) + 1 - 3 = 0 - 5 + 1 - 3 = -7 \neq 0 \implies P_r \notin \pi.$$

Al no pertenecer el punto al plano, la recta no está contenida en él, sino que es estrictamente paralela.

Conclusión: La recta r y el plano π son paralelos si y solo si $m = 5$.

3.1.3 · Punto de intersección entre π y r en función de m

Para calcular el punto de corte entre la recta r y el plano π , sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación general del plano:

$$2(2\lambda) + m(-1 - \lambda) + (1 + \lambda) - 3 = 0.$$

Desarrollamos los productos y agrupamos los términos con λ y los términos independientes:

$$4\lambda - m - m\lambda + 1 + \lambda - 3 = 0 \implies (4 - m + 1)\lambda - m - 2 = 0 \implies (5 - m)\lambda = m + 2.$$

Analizamos las soluciones según el valor del parámetro real m :

Caso 1: Si $m \neq 5$. El coeficiente de λ es no nulo ($5 - m \neq 0$), por lo que existe un único valor del parámetro λ :

$$\lambda = \frac{m+2}{5-m}.$$

Sustituimos este valor en las ecuaciones paramétricas de la recta r para determinar las coordenadas del punto de corte $P(x, y, z)$: - Coordenada x :

$$x = 2\lambda = 2 \left(\frac{m+2}{5-m} \right) = \frac{2m+4}{5-m}.$$

- Coordenada y :

$$y = -1 - \lambda = -1 - \frac{m+2}{5-m} = \frac{-(5-m) - (m+2)}{5-m} = \frac{-5+m-m-2}{5-m} = \frac{-7}{5-m} = \frac{7}{m-5}.$$

- Coordenada z :

$$z = 1 + \lambda = 1 + \frac{m+2}{5-m} = \frac{5-m+m+2}{5-m} = \frac{7}{5-m}.$$

Caso 2: Si $m = 5$. La ecuación se reduce a $0 \cdot \lambda = 7$, igualdad imposible que no tiene solución. Tal como se justificó en el apartado anterior, para $m = 5$ la recta es paralela y exterior al plano, por lo que no existe ningún punto de intersección.

Conclusión: - Si $m \neq 5$, existe un único punto de intersección: $P = \left(\frac{2m+4}{5-m}, \frac{7}{m-5}, \frac{7}{5-m} \right)$. - Si $m = 5$, no existe intersección (recta paralela disjunta).

Opción 3.2

Consideramos la recta s del espacio con ecuación continua:

$$s: \frac{x-1}{0} = y-1 = \frac{z-1}{-1}.$$

Identificamos un punto de la recta $P_s(1, 1, 1)$ y su vector director $\vec{v}_s = (0, 1, -1)$. Escribimos la recta s en su **forma paramétrica exclusiva**:

$$s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \ (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

3.2.1 · Ecuación del plano perpendicular a s por $(1, 1, 1)$

Buscamos la ecuación general del plano π que pasa por el punto $Q(1, 1, 1)$ y es perpendicular a la recta s . Como el plano es perpendicular a la recta, el vector director de s actúa directamente como vector normal del plano:

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_s = (0, 1, -1).$$

La ecuación general de un plano con vector normal (A, B, C) que pasa por (x_0, y_0, z_0) es:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Sustituyendo los datos:

$$0(x-1) + 1(y-1) - 1(z-1) = 0 \implies y-1-z+1=0 \implies y-z=0.$$

Conclusión: La ecuación general del plano pedido es $y - z = 0$.

3.2.2 · Puntos de s a distancia 4 del origen

Un punto genérico perteneciente a la recta s viene expresado por sus coordenadas paramétricas en función de λ :

$$P_\lambda = (1, 1 + \lambda, 1 - \lambda).$$

La distancia euclídea desde el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ a dicho punto viene dada por la fórmula:

$$d(O, P_\lambda) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{1^2 + (1+\lambda)^2 + (1-\lambda)^2}.$$

Imponemos la condición del enunciado $d(O, P_\lambda) = 4$:

$$\sqrt{1 + (1+\lambda)^2 + (1-\lambda)^2} = 4.$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$1 + (1 + 2\lambda + \lambda^2) + (1 - 2\lambda + \lambda^2) = 16.$$

Simplificamos los términos:

$$1 + 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 16 \implies 3 + 2\lambda^2 = 16 \implies 2\lambda^2 = 13 \implies \lambda^2 = \frac{13}{2}.$$

Extrayendo la raíz cuadrada obtenemos dos valores posibles para el parámetro:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{13}{2}} = \pm \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Sustituimos cada valor en las coordenadas paramétricas de P_λ : - Para

$$\lambda_1 = +\sqrt{\frac{13}{2}} = +\frac{\sqrt{26}}{2} \implies P_1 = \left(1, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}\right).$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{13}{2}} = -\frac{\sqrt{26}}{2} \implies P_2 = \left(1, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}\right).$$

Conclusión: Los dos puntos de la recta que se encuentran a distancia 4 del origen son

$$P_1 = \left(1, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}\right) \text{ y } P_2 = \left(1, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}\right).$$

3.2.3 · Ángulo que forma la recta s con el eje Z

El eje Z es una recta con vector director canónico $\vec{u}_Z = (0, 0, 1)$, y la recta s tiene como vector director $\vec{v}_s = (0, 1, -1)$.

La fórmula teórica para calcular el coseno del ángulo $\theta \in [0, 90^\circ]$ que forman dos rectas es:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v}_s \cdot \vec{u}_Z|}{\|\vec{v}_s\| \cdot \|\vec{u}_Z\|}.$$

Calculamos cada elemento por separado: 1. Producto escalar: $|\vec{v}_s \cdot \vec{u}_Z| = |0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1| = |-1| = 1$. 2.

Módulo de $\vec{v}_s$: $\|\vec{v}_s\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. 3. Módulo de $\vec{u}_Z$: $\|\vec{u}_Z\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$.

Sustituimos estos valores en la fórmula y despejamos el ángulo:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Conclusión: El ángulo que forma la recta s con el eje Z es exactamente $\theta = 45^\circ$.

Pregunta 4 · Análisis

Opción 4.1

Consideramos la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

4.1.1 · Dominio y continuidad

Estudio del dominio: La función $f(x)$ es una función racional, es decir, el cociente de dos polinomios. Su dominio está formado por todos los números reales excepto aquellos valores que anulan el denominador:

$$x^2 + 1 = 0 \implies x^2 = -1.$$

Esta ecuación no tiene ninguna solución en el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo ($x^2 \geq 0$, por lo que $x^2 + 1 \geq 1 > 0$). Por consiguiente, el denominador nunca se anula

para ningún valor real de x . Concluimos que el dominio es todo $\mathbb{R}$:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty).$$

Estudio de la continuidad: El numerador $P(x) = x + 1$ y el denominador $Q(x) = x^2 + 1$ son funciones polinómicas y, por tanto, continuas en todo $\mathbb{R}$. Al ser $f(x)$ el cociente de dos funciones continuas cuyo denominador nunca se anula en $\mathbb{R}$, $f(x)$ es una función continua en todo su dominio, es decir, continua en todo $\mathbb{R}$.

Conclusión: El dominio de la función es $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y la función es **continua en todo $\mathbb{R}$** .

4.1.2 · Asíntotas e intervalos de crecimiento y decrecimiento

Estudio de las asíntotas:

1. **Asíntotas verticales:** Las asíntotas verticales de una función racional se buscan en los puntos donde se anula el denominador. Como hemos demostrado que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales, el denominador no se anula jamás. Por tanto, **no existen asíntotas verticales**.

2. **Asíntotas horizontales:** Comprobamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0.$$

Por consiguiente, la recta $y = 0$ (el eje X) es una **asíntota horizontal** de la función tanto hacia $+\infty$ como hacia $-\infty$.

3. **Asíntotas oblicuas:** Como la función presenta asíntota horizontal tanto hacia $+\infty$ como hacia $-\infty$, **no existen asíntotas oblicuas** (además, el grado del numerador no supera en una unidad al del denominador).

Estudio del crecimiento y decrecimiento: Calculamos la primera derivada de $f(x)$ aplicando la regla de derivación del cociente:

$$f'(x) = \frac{(x+1)' \cdot (x^2+1) - (x+1) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{1 \cdot (x^2+1) - (x+1) \cdot (2x)}{(x^2+1)^2}.$$

Operamos en el numerador:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Igualamos la primera derivada a cero para hallar los puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = 0 \iff -x^2-2x+1 = 0 \iff x^2+2x-1 = 0.$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Los puntos críticos son:

$$x_1 = -1 - \sqrt{2} \approx -2,414, \quad x_2 = -1 + \sqrt{2} \approx 0,414.$$

Como el denominador $(x^2+1)^2 > 0$ es estrictamente positivo para cualquier $x \in \mathbb{R}$, el signo de la derivada $f'(x)$ viene determinado exclusivamente por el numerador $-x^2-2x+1$. Dividimos la recta real en los intervalos delimitados por los puntos críticos (no hay puntos de discontinuidad en el dominio): - En $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$: tomamos el punto de prueba $x = -3$:

$$f'(-3) = \frac{-(-3)^2 - 2(-3) + 1}{((-3)^2 + 1)^2} = \frac{-9 + 6 + 1}{100} = \frac{-2}{100} < 0 \implies \text{Decreciente } (\searrow).$$

- En $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$: tomamos el punto de prueba $x = 0$:

$$f'(0) = \frac{-(0)^2 - 2(0) + 1}{(0^2 + 1)^2} = \frac{1}{1} = 1 > 0 \implies \text{Creciente } (\nearrow).$$

- En $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$: tomamos el punto de prueba $x = 1$:

$$f'(1) = \frac{-(1)^2 - 2(1) + 1}{(1^2 + 1)^2} = \frac{-1 - 2 + 1}{4} = \frac{-2}{4} < 0 \implies \text{Decreciente } (\searrow).$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla de signos:

Intervalo	$(-\infty, -1 - \sqrt{2})$	$(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$	$(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	-	+	-
Monotonía de $f(x)$	Decreciente ($\searrow$)	Creciente ($\nearrow$)	Decreciente ($\searrow$)

Conclusión: - La función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ y no tiene asíntotas verticales ni oblicuas. - La función es **creciente** en el intervalo $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$. - La función es **decreciente** en los intervalos $(-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, +\infty)$.

4.1.3 · Extremos relativos y absolutos

Analizamos los puntos críticos a partir del cambio de signo de la derivada primera:

1. En $x = -1 - \sqrt{2}$: La derivada pasa de signo negativo a positivo ($- \rightarrow +$), por lo que la función pasa de decrecer a crecer. Por el criterio de la primera derivada, existe un **mínimo relativo**. Calculamos su ordenada evaluando en la función original:

$$f(-1 - \sqrt{2}) = \frac{-1 - \sqrt{2} + 1}{(-1 - \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{-\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1} = \frac{-\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}}.$$

Racionalizamos multiplicando numerador y denominador por el conjugado $4 - 2\sqrt{2}$:

$$f(-1 - \sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}(4 - 2\sqrt{2})}{(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})} = \frac{-4\sqrt{2} + 4}{16 - 8} = \frac{4(1 - \sqrt{2})}{8} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \approx -0,207.$$

2. En $x = -1 + \sqrt{2}$: La derivada pasa de signo positivo a negativo ($+ \rightarrow -$), por lo que la función pasa de crecer a decrecer. Por el criterio de la primera derivada, existe un **máximo relativo**. Calculamos su ordenada evaluando en la función original:

$$f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{-1 + \sqrt{2} + 1}{(-1 + \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}}.$$

Racionalizamos multiplicando por el conjugado $4 + 2\sqrt{2}$:

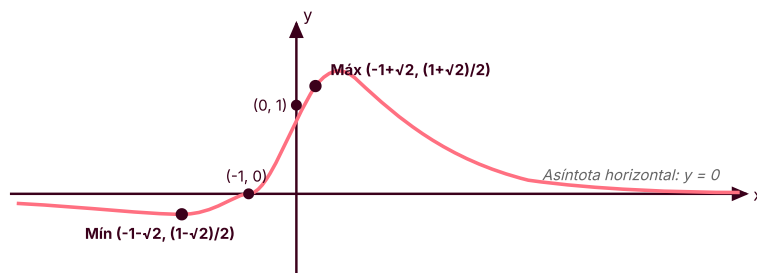
$$f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}(4 + 2\sqrt{2})}{(4 - 2\sqrt{2})(4 + 2\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{2} + 4}{16 - 8} = \frac{4(1 + \sqrt{2})}{8} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1,207.$$

3. **Extremos absolutos:** La función es continua en todo $\mathbb{R}$ y cumple $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. - Como $f(-1 - \sqrt{2}) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} < 0$, y para todo $x \in (-\infty, -1 - \sqrt{2})$ la función decrece hacia este valor desde 0, mientras que para $x > -1 - \sqrt{2}$ sube hasta valores positivos, dicho mínimo relativo es también el **mínimo absoluto** de f en $\mathbb{R}$. - Análogamente, como $f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} > 0$, y la función alcanza aquí su cota superior decreciendo hacia 0 en el infinito, dicho máximo relativo es también el **máximo absoluto** de f en $\mathbb{R}$.

Conclusión: - El **mínimo relativo y absoluto** es el punto $\left(-1 - \sqrt{2}, \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right) \approx (-2,414, -0,207)$. - El **máximo relativo y absoluto** es el punto $\left(-1 + \sqrt{2}, \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right) \approx (0,414, 1,207)$.

4.1.4 · Representación gráfica

Recopilamos los elementos clave estudiados: - Corte con el eje Y : $(0, f(0)) = (0, 1)$. - Corte con el eje X : $f(x) = 0 \implies x + 1 = 0 \implies (-1, 0)$. - Asíntota horizontal: $y = 0$ (en ambos extremos). - Mínimo absoluto: $(-1 - \sqrt{2}, \frac{1 - \sqrt{2}}{2})$. - Máximo absoluto: $(-1 + \sqrt{2}, \frac{1 + \sqrt{2}}{2})$.



Opción 4.2

Un decorador pinta una pared rectangular de 12 metros de largo por 3 de alto. La esquina inferior izquierda corresponde al origen $(0, 0)$ y la curva divisoria tiene ecuación:

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2, \quad x \in [0, 12].$$

La parte verde queda por debajo de la curva y la roja por encima.

4.2.1 · Monotonía, cortes y extremos absolutos en $[0, 12]$

Cortes con los ejes en $[0, 12]$: - Corte con el eje vertical Y ($x = 0$):

$$f(0) = \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 = \cos(0) + 2 = 1 + 2 = 3 \implies \text{Punto } (0, 3).$$

- Corte con el eje horizontal X ($f(x) = 0$):

$$\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 = 0 \implies \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) = -2.$$

Como la función coseno toma valores exclusivamente en el intervalo $[-1, 1]$, la ecuación no tiene solución real. Por tanto, **la curva no corta al eje X** en ningún punto (permanece siempre estrictamente por encima del suelo).

Monotonía en $[0, 12]$: Calculamos la derivada de $f(x)$ aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) \cdot \frac{\pi}{9} = -\frac{\pi}{9}\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right).$$

Igualamos a cero en el interior del intervalo $(0, 12)$:

$$-\frac{\pi}{9}\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \iff \sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \iff \frac{\pi x}{9} = k\pi \implies x = 9k.$$

Para $k = 1$, obtenemos el único punto crítico interior:

$$x = 9 \in (0, 12).$$

Estudiamos el signo de la derivada en los dos intervalos que determina: - En $(0, 9)$: $\frac{\pi x}{9} \in (0, \pi)$, donde el seno es positivo. Por tanto, $f'(x) = -\frac{\pi}{9}(+) < 0 \implies f$ es **decreciente** ($\searrow$) en $[0, 9]$. - En $(9, 12)$: $\frac{\pi x}{9} \in (\pi, \frac{4\pi}{3})$, tercer cuadrante, donde el seno es negativo. Por tanto, $f'(x) = -\frac{\pi}{9}(-) > 0 \implies f$ es **creciente** ($\nearrow$) en $[9, 12]$.

Extremos absolutos en $[0, 12]$: Evaluamos la función en los extremos del intervalo y en el punto crítico: - En $x = 0$:

$$f(0) = \cos(0) + 2 = 3.$$

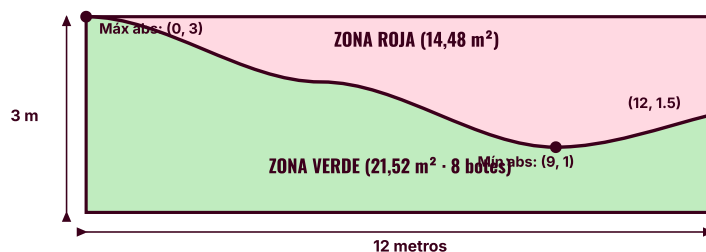
- En $x = 9$:

$$f(9) = \cos\left(\frac{9\pi}{9}\right) + 2 = \cos(\pi) + 2 = -1 + 2 = 1.$$

- En $x = 12$:

$$f(12) = \cos\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Comparando los tres valores: - El valor más alto es **3**, por lo que el **máximo absoluto** se alcanza en $x = 0$ con un valor de **3 m**. - El valor más bajo es **1**, por lo que el **mínimo absoluto** se alcanza en $x = 9$ con un valor de **1 m**.



4.2.2 · Cálculo del área verde y del área roja

Cálculo del área verde: La zona verde se encuentra limitada superiormente por la curva $f(x)$, inferiormente por el eje X ($y = 0$), y lateralmente por las rectas verticales $x = 0$ y $x = 12$. El área verde viene dada por la integral definida:

$$A_{\text{verde}} = \int_0^{12} f(x) dx = \int_0^{12} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \right] dx.$$

Calculamos primero la integral indefinida (primitiva):

$$\int \left[\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \right] dx = \frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x + C.$$

Aplicamos la Regla de Barrow expresando el resultado con corchetes y los límites de integración correspondientes:

$$A_{\text{verde}} = \left[\frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x \right]_0^{12}.$$

Evaluamos la primitiva en los límites de integración: - Para $x = 12$:

$$F(12) = \frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 2(12) = \frac{9}{\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 24 = 24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}. \quad \text{- Para } x = 0: F(0) = \frac{9}{\pi} \sin(0) + 2(0) = 0.$$

Restamos los valores según la Regla de Barrow:

$$A_{\text{verde}} = F(12) - F(0) = 24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 24 - 2,4807 = 21,5193 \text{ m}^2.$$

Cálculo del área roja: La pared tiene unas dimensiones rectangulares de **12 m** de base por **3 m** de altura ($A_{\text{total}} = 12 \cdot 3 = 36 \text{ m}^2$). El área roja es el complementario dentro del rectángulo:

$$A_{\text{roja}} = A_{\text{total}} - A_{\text{verde}} = 36 - \left(24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \right) = 12 + \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 14,4807 \text{ m}^2.$$

Conclusión: - El área verde es $24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 21,52 \text{ m}^2$. - El área roja es $12 + \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 14,48 \text{ m}^2$.

4.2.3 · Número mínimo de botes de pintura necesarios

Cada bote de pintura verde rinde exactamente **3 m²**. Para calcular la cantidad de botes necesarios dividimos el área verde entre el rendimiento por bote:

$$N = \frac{A_{\text{verde}}}{3} = \frac{24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}}{3} = 8 - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx \frac{21,5193}{3} \approx 7,1731 \text{ botes.}$$

Como la compra de pintura debe realizarse en botes enteros indivisibles y 7 botes solo cubrirían $21 \text{ m}^2 < 21,5193 \text{ m}^2$, redondeamos al número entero inmediatamente superior: $\lceil 7,1731 \rceil = 8 \text{ botes}$.

Conclusión: El número mínimo de botes de pintura que se van a necesitar para pintar toda la parte verde es **8 botes**.