

Convocatoria extraordinaria de 2023 · Suplente

Resolución completa de los ocho ejercicios con desarrollo y resultados exactos.

Ejercicio 1

El dominio es $(-1, \infty)$; en él $3x + 4 \neq 0$. La pendiente tangente en $x = 0$ es $f'(0)$. Derivando,

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{3a}{(3x+4)^2}, \quad f'(0) = 1 - \frac{3a}{16}.$$

Al imponer $f'(0) = 1$ resulta $\boxed{a = 0}$. Con ese valor, $f(x) = \ln(x+1)$. Cuando $x \rightarrow -1^+$, $f(x) \rightarrow -\infty$, por lo que hay una asíntota vertical $x = -1$. En $+\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$, así que no hay horizontal. Tampoco hay oblicua: $f(x)/x \rightarrow 0$, pero $f(x) - 0x = \ln(x+1) \rightarrow +\infty$, de modo que no existe un término independiente finito.

Ejercicio 2

Medimos las dimensiones en decímetros, de modo que el volumen de 20 litros es 20 dm^3 . Si r es el radio y h la altura, la superficie de chapa de un cilindro cerrado y la condición de volumen son

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h, \quad \pi r^2 h = 20.$$

Despejando $h = 20/(\pi r^2)$, reducimos la superficie a una variable:

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{40}{r}, \quad r > 0.$$

Derivamos para hallar el mínimo: $S'(r) = 4\pi r - 40/r^2 = 0$, luego $r^3 = 10/\pi$. Además $S''(r) = 4\pi + 80/r^3 > 0$, así que es un mínimo. De la relación del volumen se obtiene $h = 2r$. Por tanto,

$$\boxed{r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \text{ dm}, \quad h = 2\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \text{ dm} .}$$

Ejercicio 3

Hacemos el cambio indicado $x = t^2$, $dx = 2t dt$:

$$\int \arctan(\sqrt{x}) dx = \int 2t \arctan t dt.$$

Por partes, con $u = \arctan t$ y $dv = 2t dt$,

$$\int 2t \arctan t dt = t^2 \arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = (t^2 + 1) \arctan t - t + C.$$

Volviendo a x y usando $F(0) = 1$, obtenemos $C = 1$ y

$$\boxed{F(x) = (x+1) \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + 1}.$$

Ejercicio 4

En $x = 0$, $\ln(x+1) = 0$, así que la gráfica corta el eje de abscisas allí. La función es positiva para $x > 0$; por ello el área entre $x = 0$ y $x = e - 1$ es

$$S = \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx = [(x+1) \ln(x+1) - (x+1)]_0^{e-1} = \boxed{1}.$$

Ejercicio 5

La ecuación $3X - B^t = AX$ se puede reorganizar como $(3I - A)X = B^t$. Para A y B del enunciado,

$$\det(3I - A) = 1 \neq 0,$$

por lo que la matriz de coeficientes tiene inversa y la solución es única. Al multiplicar por $(3I - A)^{-1}$ a la izquierda,

$$X = (3I - A)^{-1}B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -11 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6

Sean A, S, C los números de series de animación, ciencia ficción y comedia, y $T = A + S + C$. Traducimos los porcentajes y la diferencia del enunciado al sistema

$$0.30A + 0.50S = 0.20T, \quad 0.25A + 0.50S + 0.60C = 0.50T, \quad S - A = 100.$$

Al resolverlo resulta $A = 300$, $S = 400$ y $C = 750$. Comprobamos: $T = 1450$, y $90 + 200 = 290 = 0.20T$; además, $75 + 200 + 450 = 725 = 0.50T$. Por tanto, hay $\boxed{A = 300, S = 400, C = 750}$ series.

Ejercicio 7

La distancia a los planos coordenados $x = 0$ e $y = 0$ es, respectivamente, $|x|$ y $|y|$. En la recta se cumplen $x + 3y = 1$ y $z = y - x$. La condición de equidistancia es $|x| = |y|$:

$$\text{si } x = y, \quad (x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right); \quad \text{si } x = -y, \quad (x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

Los puntos pedidos son $\boxed{(1/4, 1/4, 0)}$ y $\boxed{(-1/2, 1/2, 1)}$.

Ejercicio 8

Los vectores normales de los planos que definen r son $(1, -1, 1)$ y $(3, 0, -2)$; su producto vectorial da un vector director $d = (2, 5, 3)$. La recta s del apartado a) pasa por $P = (1, 0, 3)$ y tiene director $u = (-1, 1, 2)$. Un normal al plano que contiene a s y es paralelo a r es

$$d \times u = (7, -7, 7),$$

que podemos simplificar a $(1, -1, 1)$. Usando P , la ecuación general del plano es

$$\boxed{x - y + z - 4 = 0}.$$

Para el apartado b), parametrizamos r tomando $z = t$: $(x, y, z) = ((2t - 2)/3, (5t - 5)/3, t)$. Al sustituir en $2x + 5y + 3z = 41$ obtenemos $t = 4$, con punto de intersección $(2, 5, 4)$. Como la recta corta al plano, la distancia entre ellos es $\boxed{0}$.