

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X que verifica $AXB = 2C$ *Solución:**Para despejar la matriz X debemos efectuar, en la expresión $AXB = 2C$, las siguientes operaciones:*

- multiplicar por la izquierda por A^{-1} : $A^{-1}AXB = A^{-1}2C$, como $A^{-1}A = I$, queda $XB = A^{-1}2C$
- multiplicar por la derecha por B^{-1} : $XB B^{-1} = A^{-1}2C B^{-1}$, como $B B^{-1} = I$, queda $X = A^{-1}2C B^{-1}$

*Por tanto para calcular la matriz X necesitamos calcular las inversas de las matrices A y B .**Cálculo de A^{-1} :*1) Cálculo de $|A|$,

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \text{ como no es nulo podemos calcular } A^{-1}$$

2) Cálculo de A^{-1}

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{* \frac{1}{-4}} \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

*Cálculo de B^{-1} :*1) Cálculo de $|B|$,

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \text{ como no es nulo podemos calcular } B^{-1}$$

2) Cálculo de B^{-1}

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{* \frac{1}{-4}} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Luego,

$$X = A^{-1}2CB^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Un banco dispone de 18 millones de euros para ofrecer préstamos de riesgo alto y medio, con rendimientos de 14% y 7%, respectivamente. Sabiendo que se debe dedicar al menos 4 millones de euros a préstamos de riesgo medio y que el dinero invertido en alto y medio riesgo debe estar a lo sumo a razón de 4 a 5, determinar cuánto debe dedicarse a cada uno de los tipos de préstamos para maximizar el beneficio y calcular éste.

Solución:

Utilizando las siguientes incógnitas: $x = \text{millones dedicados a riesgo alto}$
 $y = \text{millones dedicados a riesgo bajo}$

las restricciones del problema serán:

“Un banco dispone de 18 millones de euros” $x + y \leq 18$

“debe dedicar al menos 4 millones de euros a préstamos de riesgo medio” $y \geq 4$

“el dinero invertido en alto y medio riesgo debe estar a lo sumo a razón de 4 a 5” $\frac{x}{y} \leq \frac{4}{5}$

Esta última restricción se transforma en: $5x \leq 4y \rightarrow 5x - 4y \leq 0$

El beneficio que se obtiene es: $0'14x + 0'07y$

Por tanto el problema a resolver es,

maximizar $z = 0'14x + 0'07y$

s.a. $x + y \leq 18$
 $y \geq 4$
 $5x - 4y \leq 0$
 $x \geq 0, y \geq 0$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$$x + y \leq 18$$

$$y \geq 4$$

$$5x - 4y \leq 0$$

$$x + y = 18$$

$$y = 4$$

$$5x - 4y = 18$$

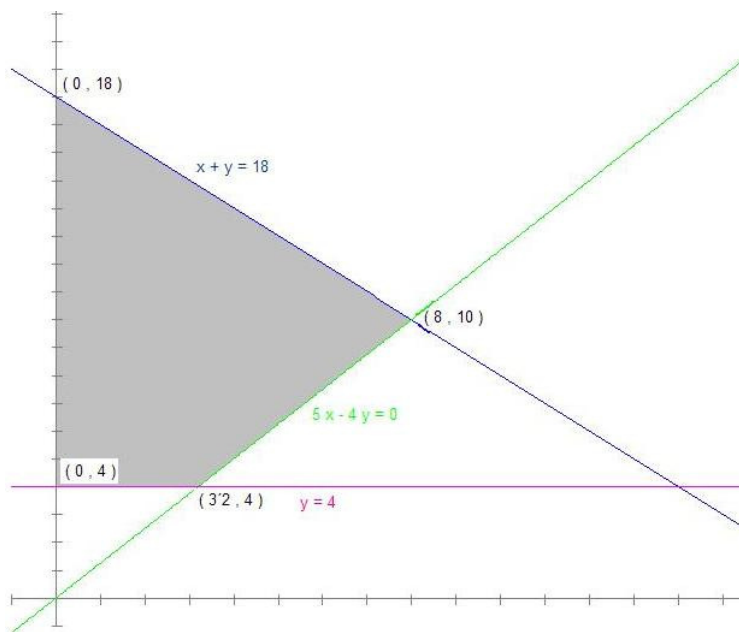
x	y
0	18
18	0

x	y
0	4
6	4

x	y
0	0
4	5

(0,0) ¿cumple la restricción? Sí (0,0) ¿cumple la restricción? No (1,0) ¿cumple la restricción? No
 $0 + 0 \leq 18$ Sí $0 \geq 4$ No $5 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \leq 0$ No

La representación gráfica es la zona sombreada del siguiente gráfico



Calculemos los puntos de corte que necesitamos conocer,

$\begin{cases} x + y = 18 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases}$	Multiplicando la 1ª ecuación por 4	Sumando ambas ecuaciones, $9x = 72 \rightarrow x = 8$ Sustituyendo en la 1ª $8 + y = 18; y = 10$	El punto de corte es $(8, 10)$
---	------------------------------------	---	-----------------------------------

$\begin{cases} y = 4 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases}$	Sustituyendo el valor de y en la 2ª ecuación, $5x - 4 \cdot 4 = 0 \rightarrow 5x - 16 = 0 \rightarrow x = 16/5 = 3.2$	El punto de corte es $(3.2, 4)$
--	--	------------------------------------

La región factible está formada por los puntos de la zona coloreada.

Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x, y)	$z = 0.14x + 0.07y$		Solución: Deben dedicarse 8 millones de euros a los préstamos de riesgo alto y 10 millones a los de riesgo medio. El beneficio que se obtendrá será de 1.82 millones de euros (1.820.000€).
$(0, 4)$	0.28		
$(0, 18)$	1.26		
$(8, 10)$	1.82	máximo	
$(3.2, 4)$	0.728		

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Una multinacional ha estimado que anualmente sus ingresos en euros vienen dados por la función $I(x) = 28x^2 + 36.000x$, mientras que sus gastos (también en euros) pueden calcularse mediante la función $G(x) = 44x^2 + 12.000x + 700.000$, donde x representa la cantidad de unidades vendidas. Determinar:

- La función que define el beneficio anual en euros.
- La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo. Justificar que es máximo.
- El beneficio máximo.

Solución:

La información que tenemos de la multinacional es:

Unidades vendidas	Ingresos	Gastos	Beneficio
x	$I(x) = 28x^2 + 36.000x$	$G(x) = 44x^2 + 12.000x + 700.000$	$I(x) - G(x)$

a) Por lo tanto la función que define el beneficio anual es,

$$B(x) = (28x^2 + 36.000x) - (44x^2 + 12.000x + 700.000) = -16x^2 + 24000x - 700000$$

b) Buscamos el máximo relativo de la función $B(x)$,

$$B'(x) = -32x + 24000$$

$$-32x + 24000 = 0 \rightarrow -32x = -24000 \rightarrow x = -24000/(-32) \rightarrow x = 750$$

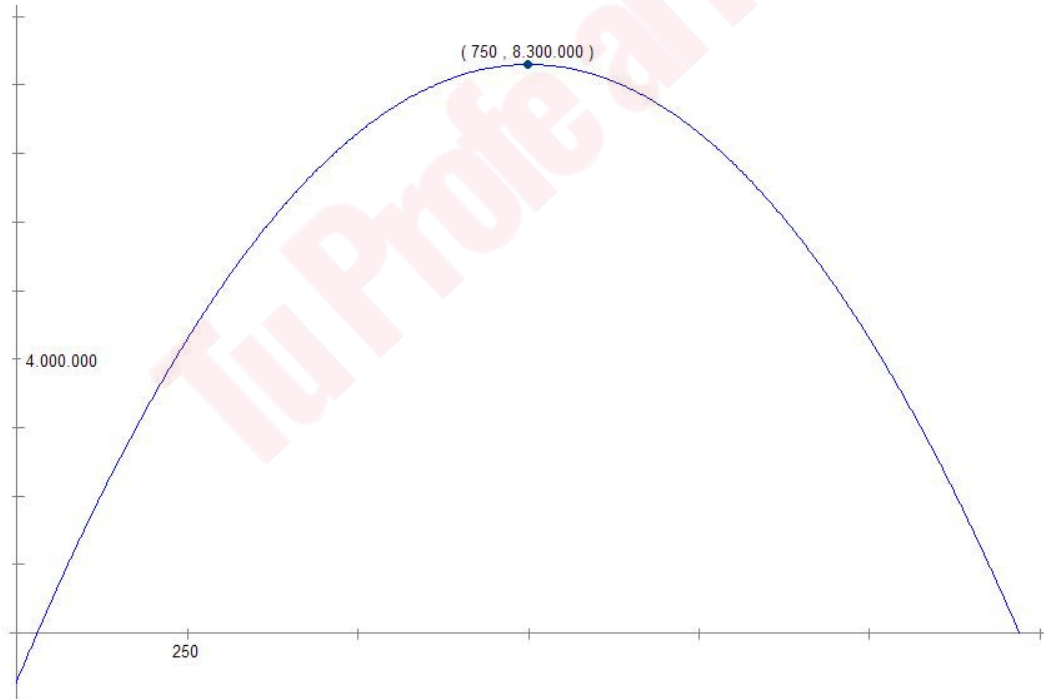
Veamos que este valor de x es el máximo de la función $B(x)$,

como x representa el número de unidades vendidas, $x \geq 0$, $x = 750$ es mayor que 0,

la expresión de la función $B(x)$, polinomio de 2º grado, corresponde a una parábola, el coeficiente de x^2 es negativo, la parábola va "hacia abajo", por tanto $B(x)$ alcanza su máximo absoluto en $x=750$.

Para que el beneficio sea máximo hay que vender 750 unidades.

También podemos hacer una representación gráfica de la función $B(x)$ para comprobar que $x = 750$ es el máximo absoluto.



c) El beneficio máximo será $B(750) = -16 \cdot 750^2 + 24000 \cdot 750 - 700000 = 8300000$

El beneficio máximo es 8.300.000 €

EJERCICIO A

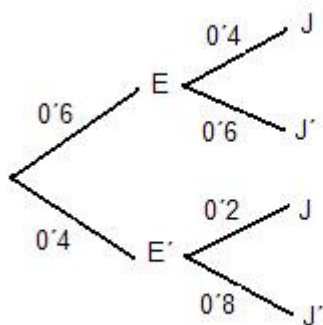
PROBLEMA 4. El 60% de las personas que visitaron un museo durante el mes de mayo eran españoles. De éstos, el 40% eran menores de 20 años. En cambio, de los que no eran españoles, tenían menos de 20 años el 30%. Calcular:

- La probabilidad de que un visitante elegido al azar tenga menos de 20 años.
- Si se escoge un visitante al azar, la probabilidad de que no sea español y tenga 20 años o más.

Solución:

Considerando los sucesos: $E = \text{ser español}$ $J = \text{ser menor de 20 años}$
 $E' = \text{no ser español}$ $J' = \text{tener 20 años o más}$

El árbol del problema sería,



$$a) P(J) = P(E) P(J/E) + P(E') P(J/E') = 0.6 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.24 + 0.08 = 0.32$$

$$b) P(E' \cap J') = P(E') P(J'/E') = 0.4 \cdot 0.8 = 0.32$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Juan decide invertir una cantidad de 12.000 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas distintas, A, B y C. Invierte en A el doble que en B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A se han revalorizado un 4%, las de B un 5% y las de C han perdido un 2% de su valor original. Con resultado de todo ello, Juan ha obtenido un beneficio de 432,50 €. Determinar cuánto invirtió Juan en cada una de las empresas.

Solución:

Utilizando las siguientes incógnitas,

x = inversión en la empresa A

y = inversión en la empresa B

z = inversión en la empresa C

el problema se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x + y + z = 12000 \\ x = 2(y + z) \\ \frac{4}{100}x + \frac{5}{100}y - \frac{2}{100}z = 432,5 \end{cases}$$

efectuando las operaciones indicadas en la 2ª y 3ª ecuación queda,

$$\begin{cases} x + y + z = 12000 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 4x + 5y - 2z = 43250 \end{cases}$$

el determinante de la matriz de coeficientes es,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 5 - 8 - 8 + 10 + 2 = 21 \neq 0$$

la solución será: (para resolver los determinantes efectuaré las operaciones indicadas entre paréntesis)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12000 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 43250 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{21} = (C_2 - C_3) = \frac{\begin{vmatrix} 12000 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 43250 & 7 & -2 \end{vmatrix}}{21} = \frac{14 \cdot 12000}{21} = 8000$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12000 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 43250 & -2 \end{vmatrix}}{21} = \frac{43250 - 96000 + 86500 + 24000}{21} = \frac{57750}{21} = 2750$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12000 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 43250 \end{vmatrix}}{21} = (C_2 - C_1) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 12000 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 43250 \end{vmatrix}}{21} = \frac{-3 \cdot 43250 + 12000 + 12 \cdot 12000}{21} = \frac{26250}{21} = 1250$$

Por lo tanto, en la empresa A invirtió 8000 €, en la B 2750 € y en la C 1250 €.

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Un tren de mercancías puede arrastrar, como máximo, 27 vagones. En cierto viaje transporta coches y motocicletas. Para coches debe dedicar un mínimo de 12 vagones y para motocicletas no menos de la mitad de los vagones que dedica a los coches. Si los ingresos de la compañía ferroviaria son de 540 € por vagón de coches y 360 € por vagón de motocicletas, calcular cómo se deben distribuir los vagones para que el beneficio de un transporte de coches y motocicletas sea máximo y cuánto vale dicho beneficio.

Solución:

Utilizando las siguientes incógnitas: $x = \text{número de vagones dedicados a coches}$
 $y = \text{número de vagones dedicados a motocicletas}$

las restricciones del problema serán:

“puede arrastrar, como máximo, 27 vagones” $x + y \leq 27$

“Para coches debe dedicar un mínimo de 12 vagones” $x \geq 12$

“para motocicletas no menos de la mitad de los vagones que dedica a los coches” $y \geq \frac{x}{2}$

Esta última restricción se transforma en: $2y \geq x \rightarrow 2y - x \geq 0$

El beneficio que se obtiene es: $540x + 360y$

Por tanto el problema a resolver es,

maximizar $z = 540x + 360y$

s.a. $x + y \leq 27$
 $x \geq 12$
 $2y - x \geq 0$
 $x, y \in \mathbb{N}$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$$x + y \leq 27$$

$$x \geq 12$$

$$2y - x \geq 0$$

$$x + y = 27$$

$$x = 12$$

$$2y - x = 0$$

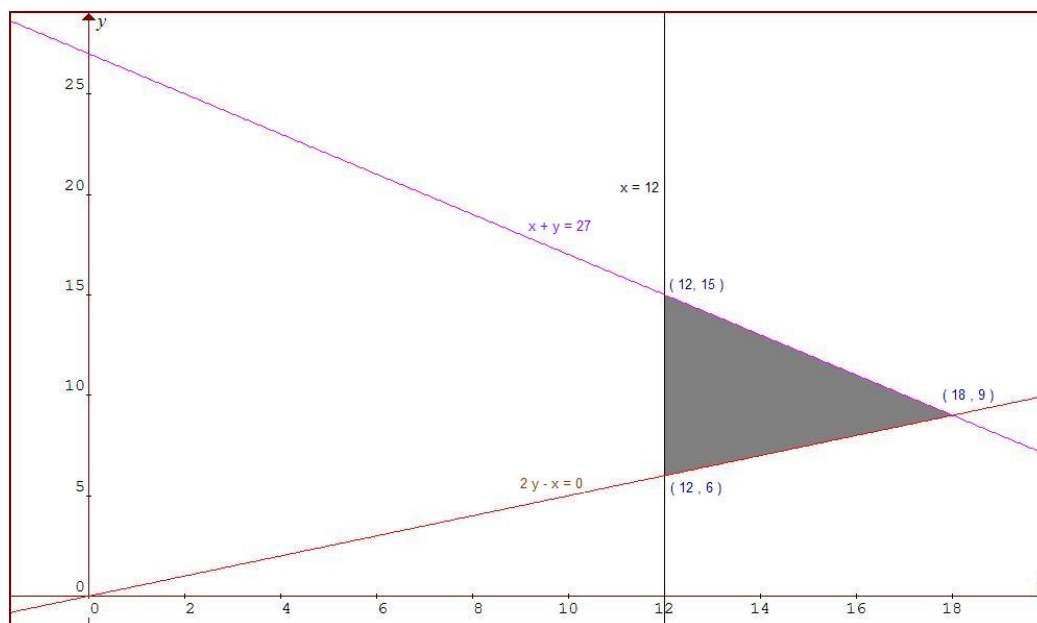
x	y
0	27
27	0

x	y
12	0
12	2

x	y
0	0
2	1

$(0,0)$ ¿cumple la restricción? Sí $0 + 0 \leq 27$ $(0,0)$ ¿cumple la restricción? No $0 \geq 12$ $(1,0)$ ¿cumple la restricción? No $2 \cdot 0 - 1 \geq 0$ No

La representación gráfica es la zona sombreada del siguiente gráfico



Calculemos los puntos de corte que necesitamos conocer,

$\begin{cases} x + y = 27 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$	Sumando ambas ecuaciones, $3y = 27 \rightarrow y = 9$ Sustituyendo en la 1ª $x + 9 = 27; x = 18$	El punto de corte es (18 , 9)
---	---	------------------------------------

$\begin{cases} x = 12 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$	Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación, $-12 + 2y = 0 \rightarrow 2y = 12 \rightarrow y = 6$	El punto de corte es (12 , 6)
---	---	------------------------------------

$\begin{cases} x = 12 \\ x + y = 27 \end{cases}$	Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación, $12 + y = 27 \rightarrow y = 15$	El punto de corte es (12 , 15)
--	---	-------------------------------------

La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona coloreada.

Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x, y)	$z = 540x + 360y$		Solución: Para que el beneficio sea máximo deben dedicarse 18 vagones para coches y 9 para motocicletas. El beneficio que se obtendrá será de 12960 euros.
(12 , 6)	$540 \cdot 12 + 360 \cdot 6 = 8640$		
(12 , 15)	$540 \cdot 12 + 360 \cdot 15 = 11880$		
(18 , 9)	$540 \cdot 18 + 360 \cdot 9 = 12960$	máximo	

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. La parte superior de una pared de 2 metros de base tiene una forma parabólica determinada por la expresión $-0,5x^2 + x + 1$, donde x mide la longitud en metros desde la parte izquierda de la pared. Calcular la superficie de dicha pared utilizando una integral.

Solución:

La parte superior de la pared está definida por la función $y = -0,5x^2 + x + 1$ para $x \in [0, 2]$ (la base de la pared mide 2 metros).

Representemos gráficamente la pared, para ello representamos la parábola

$$y = -0,5x^2 + x + 1 \quad \text{para } x \in [0, 2]$$

Vértice de la parábola: $(1, 1,5)$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-0,5)} = \frac{-1}{-1} = 1 \quad e \quad y = -0,5 \cdot 1^2 + 1 + 1 = 1,5$$

Puntos de corte con los ejes coordenados: $(0, 1)$

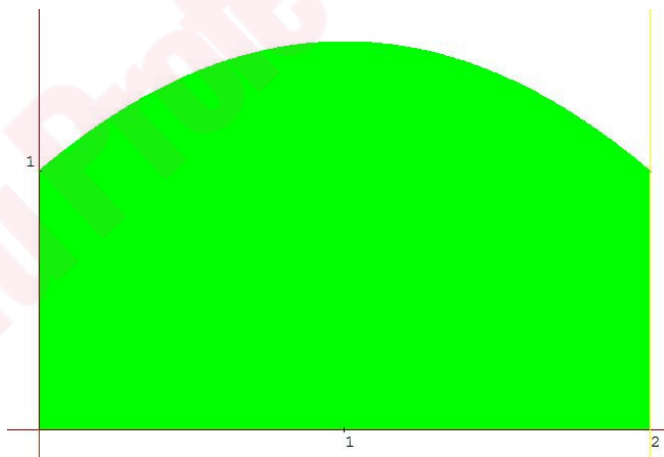
$$\text{para } x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\text{para } y = 0 \rightarrow -0,5x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-0,5)1}}{2(-0,5)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{-1} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{-1} = \begin{aligned} x_1 &= \frac{-1 + \sqrt{3}}{-1} = 1 - \sqrt{3} \approx -0,7 \\ x_2 &= \frac{-1 - \sqrt{3}}{-1} = 1 + \sqrt{3} \approx 2,7 \end{aligned}$$

los puntos de corte obtenidos $(-0,7, 0)$ y $(2,7, 0)$ están fuera del dominio de definición de la función que representa la parte superior de la pared. Pueden servir para dibujar mejor esta función.

La representación gráfica de la pared sería:



La superficie de esta pared se calcula mediante la siguiente integral,

$$\int_0^2 (-0,5x^2 + x + 1) dx = \left[-0,5 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 = \left(-0,5 \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \right) - 0 = \frac{-4}{3} + \frac{4}{2} + 2 = \frac{-4}{3} + 4 = \frac{8}{3}$$

La superficie de la pared es $\frac{8}{3} m^2$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Las máquinas A y B producen 50 y 250 piezas por hora, con un porcentaje de fallos de 1% y del 10%, respectivamente. Tenemos mezcladas las piezas fabricadas en una hora y elegimos una pieza al azar. Calcular:

- La probabilidad de que sea una pieza no defectuosa fabricada en la máquina B.
- La probabilidad de que esté fabricada en la máquina A, si sabemos que es defectuosa.

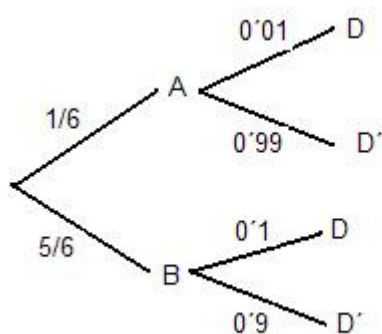
Solución:

Considerando los sucesos: A = pieza fabricada por la máquina A
 B = pieza fabricada por la máquina B
 D = pieza defectuosa
 D' = pieza no defectuosa

sus probabilidades son:

$$P(A) = \frac{50}{300} = \frac{1}{6} \quad P(B) = \frac{250}{300} = \frac{5}{6} \quad P(D/A) = 0.01 \quad P(D/B) = 0.1$$

El árbol del problema sería,



$$a) P(D' \cap B) = \frac{5}{6} \cdot 0.9 = 0.75$$

$$b) P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 0.01}{\frac{1}{6} \cdot 0.01 + \frac{5}{6} \cdot 0.1} = \frac{\frac{0.01}{6}}{\frac{0.01}{6} + \frac{0.5}{6}} = \frac{\frac{0.01}{6}}{\frac{0.51}{6}} = \frac{0.01}{0.51} = 0.0196078$$