

Julio de 2026 · Convocatoria extraordinaria

El examen permite elegir una opción en las preguntas 2, 3 y 4. Para que puedas estudiar cualquiera de ellas, aquí se resuelven las dos opciones en cada pregunta y se justifican todos los pasos.

Pregunta 1 · Probabilidad y estadística

Datos y sucesos

Llamamos (H), (T) y (D) a jugar en hierba, tierra batida y pista dura, respectivamente. Llamamos (R) al suceso «gana Roger» y ($\overline{R}$) a «gana Rafa».

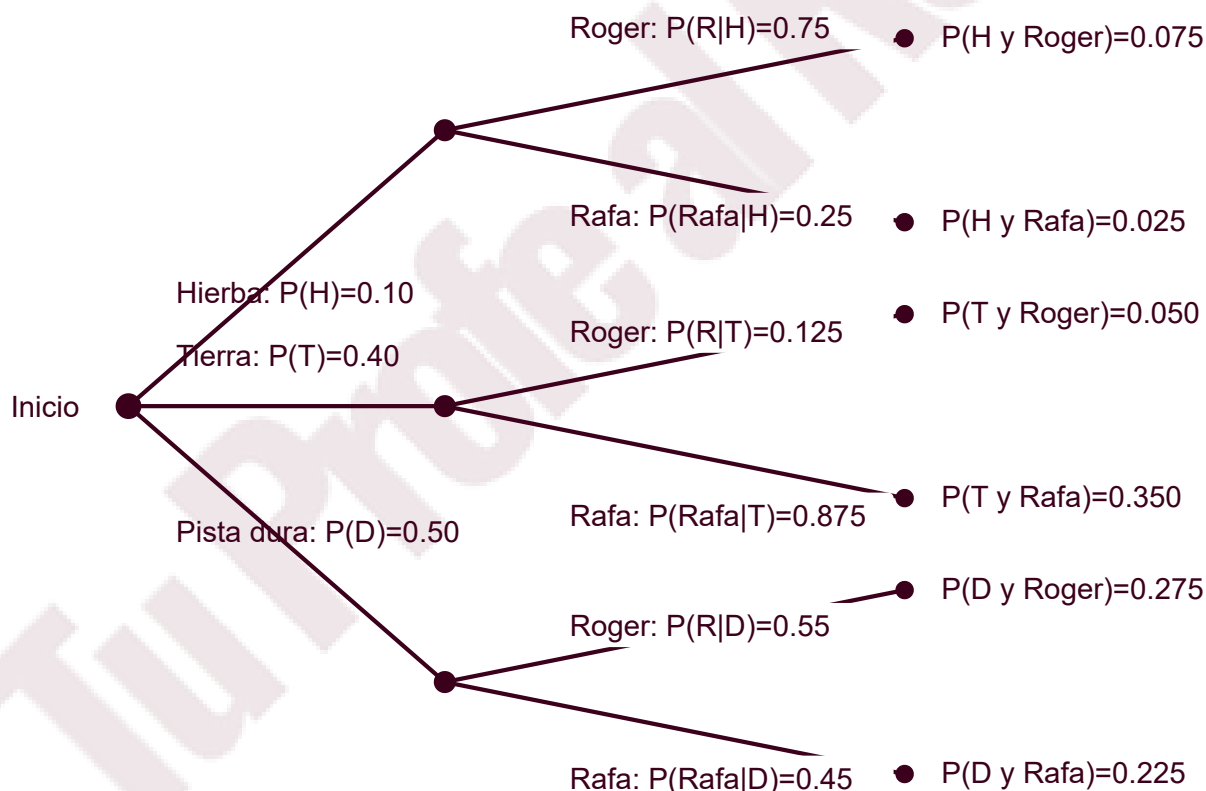
Las probabilidades de las superficies son

$$P(H) = 0.10, P(T) = 0.40, P(D) = 1 - 0.10 - 0.40 = 0.50.$$

En cada partido gana uno de los dos tenistas. Por tanto, las probabilidades condicionadas de victoria son

Superficie	$P(R \mid \text{superficie})$	$P(\overline{R} \mid \text{superficie})$
H	$1 - 0.25 = 0.75$	0.25
T	0.125	$1 - 0.125 = 0.875$
D	0.55	$1 - 0.55 = 0.45$

El árbol muestra primero dónde se juega el partido y después quién lo gana. En las hojas se indican las probabilidades conjuntas; se obtienen multiplicando las dos probabilidades de cada recorrido.



1.1 Porcentaje de partidos que gana Roger

Sumamos las tres maneras incompatibles de que Roger gane: que el partido sea en hierba, en tierra batida o en pista dura. En cada rama, la probabilidad conjunta es «probabilidad de la superficie $\times$ probabilidad de ganar en esa superficie»:

$$\begin{aligned} P(R) &= P(H)P(R \mid H) + P(T)P(R \mid T) + P(D)P(R \mid D) \\ &= 0.10(0.75) + 0.40(0.125) + 0.50(0.55) \\ &= 0.075 + 0.050 + 0.275 = 0.400. \end{aligned}$$

Conclusión: Roger gana el 40 % de sus enfrentamientos.

1.2 Probabilidad de que el partido fuera en pista dura, sabiendo que ganó Rafa

Primero calculamos la probabilidad total de que gane Rafa. Como en cada partido gana uno de los dos tenistas,

$$P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0.40 = 0.60.$$

La probabilidad de que el partido fuera en pista dura y ganara Rafa es el producto asociado a esa hoja del árbol:

$$P(D \cap \bar{R}) = P(D)P(\bar{R} | D) = 0.50(0.45) = 0.225.$$

Por la definición de probabilidad condicionada,

$$P(D | \bar{R}) = \frac{P(D \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{0.225}{0.60} = \frac{3}{8} = 0.375.$$

Conclusión: dado que ganó Rafa, la probabilidad de que el partido se jugara en pista dura es 3/8, es decir, el 37,5 %.

1.3 Probabilidad de que Roger gane 5 o 6 de 10 partidos en pista dura

Cada partido en pista dura puede considerarse un ensayo con dos resultados (Roger gana o no gana), y la probabilidad de victoria de Roger es $p = 0.55 = \frac{11}{20}$. Si (X) cuenta sus victorias en diez partidos, entonces

$$X \sim \text{Bin}(10, 0.55), P(X = k) = \binom{10}{k} (0.55)^k (0.45)^{10-k}.$$

Los sucesos $X = 5$ y $X = 6$ son incompatibles, así que sumamos sus probabilidades:

$$\begin{aligned} P(X = 5 \text{ o } 6) &= P(X = 5) + P(X = 6) \\ &= \binom{10}{5} \left(\frac{11}{20}\right)^5 \left(\frac{9}{20}\right)^5 + \binom{10}{6} \left(\frac{11}{20}\right)^6 \left(\frac{9}{20}\right)^4 \\ &= \frac{2418684693579}{5120000000000} \\ &\approx 0.4723993542. \end{aligned}$$

Conclusión: la probabilidad pedida es aproximadamente 0,4724, o 47,24 %.

Pregunta 2 · Álgebra

El enunciado permite elegir 2.1 o 2.2. Se desarrollan las dos opciones.

Opción 2.1 · Sistema de pseudodensidades

Las tres condiciones de equilibrio se traducen en

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5, \\ \alpha x + 2z = 0, \\ z = \alpha y. \end{cases}$$

En forma matricial, con $X=(x,y,z)^T$:

$$A_{\alpha}X = b, \quad A_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.1 Existencia y número de soluciones según α

Calculamos el determinante desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A_{\alpha} &= 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -\alpha & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{vmatrix} \\ &= 2\alpha - 3\alpha - \alpha^2 \\ &= -\alpha(\alpha + 1). \end{aligned}$$

El determinante se anula cuando

$$-\alpha(\alpha + 1) = 0 \iff \alpha = 0 \text{ o } \alpha = -1.$$

Caso 1: $\alpha \neq 0, -1$. Como $\det A_{\alpha} \neq 0$, hay un menor de orden 3 no nulo:

$$\operatorname{rg}(A_{\alpha}) = 3.$$

La matriz ampliada tiene tres filas y, por tanto, rango como máximo 3; además contiene ese mismo menor:

$$\operatorname{rg}(A_{\alpha}^*) = 3 = \operatorname{rg}(A_{\alpha}).$$

Por Rouché–Frobenius, el sistema es compatible. Como ambos rangos son iguales al número de incógnitas, es un **sistema compatible determinado (SCD)**.

Caso 2: $\alpha = 0$. La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Un menor de orden 2 de A_0 es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Así, $\operatorname{rg}(A_0) \geq 2$. Como $\det A_0 = 0$, su rango es menor que 3 y, por tanto, $\operatorname{rg}(A_0) = 2$. En la ampliada, la segunda fila es el doble de la tercera (también en el término independiente), de modo que $\operatorname{rg}(A_0^*) \leq 2$. El menor anterior sigue estando en la ampliada, así que

$$\operatorname{rg}(A_0) = \operatorname{rg}(A_0^*) = 2 < 3.$$

Por Rouché–Frobenius, es un **sistema compatible indeterminado (SCI)**, con infinitas soluciones.

Caso 3: $\alpha = -1$. En este caso

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{-1}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ -1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

El menor de A_{-1} formado por las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 2 vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Luego $\text{rg}(A_{-1}) \geq 2$; como el determinante de orden 3 es cero, $\text{rg}(A_{-1}) = 2$. En la matriz ampliada, el menor de orden 3 formado por las columnas de x , y y el término independiente es

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A_{-1}^*) = 3$. Así,

$$\text{rg}(A_{-1}) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A_{-1}^*).$$

Por Rouché–Frobenius, es un **sistema incompatible (SI)**: no tiene solución.

Conclusión de 2.1.1: SCD si $\alpha \neq 0, -1$; SCI si $\alpha = 0$; SI si $\alpha = -1$.

2.1.2 Valores de (x, y, z) cuando $\alpha \neq -1$

El enunciado pide considerar $\alpha \neq -1$, lo que incluye los casos $\alpha \neq 0, -1$ y $\alpha = 0$.

Si $\alpha \neq 0, -1$, de las ecuaciones segunda y tercera:

$$\alpha x + 2z = 0, z = \alpha y \implies \alpha x + 2\alpha y = 0 \implies x = -2y.$$

Sustituimos $x = -2y$ y $z = \alpha y$ en la primera ecuación:

$$-2y + 3y + \alpha y = 5 \implies (\alpha + 1)y = 5 \implies y = \frac{5}{\alpha + 1}.$$

Por consiguiente,

$$x = -\frac{10}{\alpha + 1}, y = \frac{5}{\alpha + 1}, z = \frac{5\alpha}{\alpha + 1} \quad (\alpha \neq 0, -1).$$

Si $\alpha = 0$, las ecuaciones se reducen a $z = 0$ y $x + 3y = 5$. Tomamos $y = t$, con $t \in \mathbb{R}$:

$$(x, y, z) = (5 - 3t, t, 0), t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión: para $\alpha \neq -1$, las fórmulas anteriores dan la única configuración si además $\alpha \neq 0$; si $\alpha = 0$, hay infinitas configuraciones.

Opción 2.2 · Ecuaciones con matrices

Se dan

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.1 Resolver $AX = BX + b$

Restamos (BX) en ambos miembros:

$$AX = BX + b \implies (A - B)X = b.$$

Calculamos la matriz diferencia por entradas:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-5 & -1-(-2) \\ 1-2 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos que es invertible:

$$\det(A - B) = (-3)(-2) - 1(-1) = 6 + 1 = 7 \neq 0.$$

Para una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, su inversa es $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Aplicamos la fórmula:

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$X = (A - B)^{-1}b = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Calcular $\det(A^5(2B)^{-1})$

Usamos la multiplicatividad del determinante, $\det(CD) = \det C \det D$, y $\det(M^{-1}) = 1/\det M$:

$$\det(A^5(2B)^{-1}) = \frac{\det(A^5)}{\det(2B)} = \frac{(\det A)^5}{\det(2B)}.$$

Calculamos por separado:

$$\det A = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 3, \det B = 5 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 19.$$

Como B es de orden 2, $\det(2B) = 2^2 \det(B) = 4 \cdot 19 = 76$. Por tanto, $\det(A^5(2B)^{-1}) = 3^5/76 = 243/76$.

2.2.3 Hallar α, β si $\alpha A + \beta B = I$

Escribimos los dos productos y los sumamos entrada a entrada:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \beta B = \begin{pmatrix} 5\beta & -2\beta \\ 2\beta & 3\beta \end{pmatrix},$$
$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} 2\alpha + 5\beta & -\alpha - 2\beta \\ \alpha + 2\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Igualamos las entradas correspondientes. De las entradas no diagonales se obtiene $\alpha + 2\beta = 0$, es decir, $\alpha = -2\beta$. Con la entrada superior izquierda:

$$2(-2\beta) + 5\beta = 1 \implies \beta = 1, \alpha = -2.$$

Comprobamos la última entrada: $\alpha + 3\beta = -2 + 3 = 1$. Por tanto,

$$\boxed{\alpha = -2, \beta = 1.}$$

Pregunta 3 · Geometría

El enunciado permite elegir 3.1 o 3.2. Se resuelven las dos opciones.

Opción 3.1 · Plano, recta perpendicular y distancia

Se dan $A=(0,-1,0)$, $B=(1,0,1)$ y el vector $v=(2,-1,1)$.

3.1.1 Plano perpendicular a $\vec{v}$ que pasa por A

Si un plano es perpendicular a $\vec{v}$, ese vector es normal al plano. La forma general de un plano con normal $((a,b,c))$ es $ax + by + cz + d = 0$. Sustituimos $v=(2,-1,1)$ y el punto (A):

$$2x - y + z + d = 0, 2(0) - (-1) + 0 + d = 0 \implies d = -1.$$

$$\boxed{\pi : 2x - y + z - 1 = 0.}$$

3.1.2 Recta perpendicular a π que pasa por B

La recta perpendicular al plano lleva como vector director un vector normal del plano, aquí $((2,-1,1))$. Una recta por (x_0, y_0, z_0) con director $((a,b,c))$, en forma paramétrica, es $x = x_0 + a\lambda, y = y_0 + b\lambda, z = z_0 + c\lambda$. Por tanto,

$$\boxed{r : x = 1 + 2\lambda, y = -\lambda, z = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.}$$

3.1.3 Punto del plano más cercano a B

El punto más cercano es la proyección perpendicular: el corte de (r) con π . Sustituimos las ecuaciones paramétricas en el plano:

$$\begin{aligned}2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) + (1 + \lambda) - 1 &= 0, \\2 + 6\lambda &= 0, \\ \lambda &= -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Sustituimos ese parámetro en la recta:

$$C = \left(1 + 2\left(-\frac{1}{3}\right), -\left(-\frac{1}{3}\right), 1 - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}.$$

3.1.4 Distancia de B al plano

La distancia de (x_0, y_0, z_0) a $ax + by + cz + d = 0$ es

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Con $B=(1,0,1)$ y $\pi : 2x - y + z - 1 = 0$:

$$d(B, \pi) = \frac{|2(1) - 0 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}.$$

Opción 3.2 · Planos, proyección y distancia

Se da $\pi : 2x + 3y - z = 0$, con $A=(0,0,0)$, $B=(10,0,-20)$, $C=(0,15,-30)$ y $D=(1,2,-1)$.

3.2.1 Comprobar si el triángulo ABC está en π

Un punto pertenece a π si satisface $2x + 3y - z = 0$. Comprobamos los vértices:

$$A : 2(0) + 3(0) - 0 = 0, \quad B : 2(10) + 3(0) - (-20) = 40 \neq 0.$$

Aunque $A \in \pi$, el vértice $B \notin \pi$; basta para concluir que el triángulo no está contenido en ese plano.

$$\boxed{ABC \not\subset \pi.}$$

3.2.2 Proyección de D sobre el plano que pasa por A, B, C

Primero hallamos dicho plano, al que llamaremos σ . Dos vectores directores son

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (10, 0, -20), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 15, -30).$$

Un vector normal se obtiene con el producto vectorial:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (10, 0, -20) \times (0, 15, -30) \\ &= (300, 300, 150) = 150(2, 2, 1). \end{aligned}$$

Así, $((2,2,1))$ es normal. Como A es el origen, la forma general de σ es

$$\sigma : 2x + 2y + z = 0.$$

La perpendicular por D tiene director normal $((2,2,1))$. La escribimos en forma paramétrica:

$$s : x = 1 + 2\lambda, \quad y = 2 + 2\lambda, \quad z = -1 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

El pie de la perpendicular es la intersección con σ :

$$2(1 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) = 0 \implies 5 + 9\lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{5}{9}.$$

Sustituimos:

$$P = \left(1 - \frac{10}{9}, 2 - \frac{10}{9}, -1 - \frac{5}{9}\right) = \boxed{\left(-\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{14}{9}\right)}.$$

3.2.3 Distancia de D al plano π

Aplicamos la fórmula de distancia a un plano general:

$$d(D, \pi) = \frac{|2(1) + 3(2) - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \boxed{\frac{9}{\sqrt{14}}}.$$

Pregunta 4 · Análisis

El enunciado permite elegir 4.1 o 4.2. Se desarrollan las dos opciones.

Opción 4.1 · Evolución del coeficiente de gravedad

El modelo da $(F'(t)=t^2(10-t))$, donde $t \geq 0$ representa días desde el inicio.

4.1.1 Hallar $F(t)$ usando $F(0) = 6$

Integramos término a término y añadimos la constante de integración:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int t^2(10-t) dt \\ &= \int (10t^2 - t^3) dt \\ &= \frac{10}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + C. \end{aligned}$$

Usamos el dato inicial $(F(0)=6)$:

$$6 = \frac{10}{3}(0)^3 - \frac{1}{4}(0)^4 + C \implies C = 6.$$

$$F(t) = -\frac{1}{4}t^4 + \frac{10}{3}t^3 + 6.$$

4.1.2 Cuando se alcanza el máximo y cuánto vale

Como (F) es polinómica, su dominio matemático es $\mathbb{R}$; en el contexto del problema solo consideramos $t \geq 0$. No tiene asíntotas verticales, porque es finita para todo (t) . Cuando $t \rightarrow +\infty$, $(F(t)-\infty)$, así que no tiene asíntota horizontal. Tampoco hay asíntota oblicua: la pendiente tendría que ser el límite finito de $(F(t)/t)$, pero $(F(t)/t-\infty)$.

Buscamos los puntos críticos resolviendo $(F'(t)=0)$:

$$t^2(10-t) = 0 \implies t = 0 \text{ o } t = 10.$$

Para estudiar el signo en el dominio temporal, probamos un valor entre 0 y 10 y otro mayor que 10:

$$F'(5) = 5^2(10-5) = 125 > 0, \quad F'(15) = 15^2(10-15) = -1125 < 0.$$

Intervalo	$(0, 10)$	$(10, +\infty)$
Signo de $F'(t)$	+	-
Comportamiento	Crece	Decrece

En $t = 0$, la derivada vale cero pero no cambia de signo; además es el extremo inicial del intervalo temporal. En $t = 10$, el signo pasa de $(+)$ a $(-)$, así que hay un máximo absoluto para $t \geq 0$. Su valor es

$$\begin{aligned} F(10) &= -\frac{1}{4}(10)^4 + \frac{10}{3}(10)^3 + 6 \\ &= -2500 + \frac{10000}{3} + 6 \\ &= \frac{2518}{3} \approx 839.3333. \end{aligned}$$

Conclusión: el coeficiente alcanza el máximo a los 10 días y su valor es $2518/3$, aproximadamente 839,3333.

Opción 4.2 · Área de un invernadero triangular

Sea (x) la longitud de uno de los lados y (y) la longitud común de los otros dos. El perímetro impone

$$x + 2y = 60 \implies y = \frac{60 - x}{2}.$$

4.2.1 Obtener la función de área $A(x)$

Tomamos el lado (x) como base. La altura parte la base en dos segmentos de longitud (x/2). Por Pitágoras en uno de los triángulos rectángulos:

$$\begin{aligned} h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 &= y^2 \\ h^2 &= \left(\frac{60 - x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 & h &= \sqrt{900 - 30x}. \\ h^2 &= \frac{(60 - x)^2 - x^2}{4} = 900 - 30x, \end{aligned}$$

El área es base por altura dividido entre dos:

$$A(x) = \frac{x}{2} \sqrt{900 - 30x}.$$

Para que exista un triángulo no degenerado, ($x > 0$) y ($h > 0$):

$$900 - 30x > 0 \implies x < 30.$$

Por tanto, el dominio físico está formado por las longitudes x estrictamente comprendidas entre 0 y 30 metros. Cuando x se aproxima a cualquiera de esos extremos, el área tiende a 0. No hay asíntotas verticales; como el dominio está acotado, tampoco hay extremos infinitos que puedan producir asíntotas horizontales u oblicuas.

4.2.2 Maximizar la eficiencia $f(x) = A(x)^2$

Como $A(x) > 0$, maximizar $f(x) = A(x)^2$ equivale a maximizar el área. Primero desarrollamos la función:

$$f(x) = \left(\frac{x}{2} \sqrt{900 - 30x} \right)^2 = \frac{x^2}{4} (900 - 30x) = 225x^2 - \frac{15}{2}x^3.$$

El dominio de f es el mismo: x está estrictamente entre 0 y 30 metros. Es un polinomio en un intervalo acotado: no tiene asíntotas verticales y no hay extremos infinitos del dominio para comprobar asíntotas horizontales u oblicuas. Derivamos y buscamos los puntos críticos:

$$f'(x) = 450x - \frac{45}{2}x^2 = \frac{45}{2}x(20 - x),$$
$$f'(x) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = 20.$$

El punto $x = 0$ queda en la frontera (y no pertenece al dominio físico). Probamos un valor a cada lado de 20:

$$f'(10) = \frac{45}{2}(10)(10) = 2250 > 0, \quad f'(25) = \frac{45}{2}(25)(-5) = -\frac{5625}{2} < 0.$$

Intervalo	(0, 20)	(20, 30)
Signo de $f'(x)$	+	-
Comportamiento	Crece	Decrece

La eficiencia crece hasta $x = 20$ y luego decrece. Además, el área tiende a cero en ambos extremos del dominio, así que el máximo hallado es absoluto. Para $x = 20$, los otros dos lados miden $(60 - 20)/2 = 20$ m: el triángulo es equilátero. Su área es

$$A(20) = \frac{20}{2} \sqrt{900 - 30(20)} = 10\sqrt{300} = \boxed{100\sqrt{3} \text{ m}^2} \approx 173.2051 \text{ m}^2.$$

Conclusión: la eficiencia estructural es máxima cuando $x = 20$ m; en ese caso, el área del invernadero es $100\sqrt{3} \text{ m}^2$.