

Septiembre de 2010 - Convocatoria extraordinaria

El enunciado permite elegir una de las dos opciones. Aquí resolvemos las dos para que puedas practicar el examen completo. En cada apartado explicamos qué buscamos, qué regla usamos y cómo se obtiene el resultado.

Opción A - Sistemas, geometría y análisis

Problema A.1 - Discusión de un sistema con parámetro

El sistema tiene tres incógnitas y depende del parámetro real α :

$$\begin{cases} \alpha x + \alpha^3 y + z = 1, \\ \alpha x + \alpha y + z = 1, \\ \alpha^3 x + \alpha y + z = 1. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^3 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha^3 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad A^*(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^3 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha^3 & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Valores de α para los que el sistema es compatible determinado

Un sistema cuadrado tiene solución única si $\det A \neq 0$. Para calcular el determinante, restamos la segunda fila a la primera y a la tercera; estas operaciones no cambian su valor. Sea $d = \alpha^3 - \alpha$:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 0 & d & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ d & 0 & 0 \end{vmatrix} = d^2 \\ &= (\alpha^3 - \alpha)^2 = \alpha^2(\alpha^2 - 1)^2 = \alpha^2(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)^2. \end{aligned}$$

Por tanto, el determinante se anula exactamente cuando $\alpha = -1, 0, 1$. Si $\alpha \notin \{-1, 0, 1\}$, entonces

$$\operatorname{rg}(A) = 3, \operatorname{rg}(A^*) = 3,$$

porque la matriz ampliada tiene solo tres filas y contiene a A . Por Rouché-Frobenius, los rangos coinciden y valen el número de incógnitas: el sistema es compatible determinado.

Además, $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ satisface las tres ecuaciones; al ser única, esa es la solución en todos los casos regulares. Así,

$\text{SCD para } \alpha \neq -1, 0, 1, (x, y, z) = (0, 0, 1).$

b) Valores de α para los que el sistema es compatible indeterminado

Solo hay que estudiar $\alpha = -1, 0, 1$, pues son los valores que anulan el determinante.

En cada caso, las tres filas de A coinciden entre sí, y también las tres filas de A^* . Por tanto, ambos rangos son como máximo 1. La tabla muestra esas filas repetidas y un menor de orden 1 no nulo en cada matriz; así se comprueba que ambos rangos son exactamente 1:

α	fila de A	fila de A^*	menor de orden 1 elegido
-1	$(-1, -1, 1)$	$(-1, -1, 1, 1)$	$ a_{11} = a_{11}^* = 1$
0	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 1, 1)$	$ a_{13} = a_{13}^* = 1$
1	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 1, 1)$	$ a_{11} = a_{11}^* = 1$

Por tanto, aplicando Rouché-Frobenius en cada caso:

α	$\operatorname{rg}(A)$	$\operatorname{rg}(A^*)$	clasificación
-1	1	1	$1 = 1 < 3 \Rightarrow \text{SCI}$
0	1	1	$1 = 1 < 3 \Rightarrow \text{SCI}$
1	1	1	$1 = 1 < 3 \Rightarrow \text{SCI}$

En los tres casos los rangos coinciden y son menores que las tres incógnitas, así que son compatibles indeterminados (SCI). No aparece ningún caso incompatible.

c) Soluciones en los casos compatibles indeterminados

- Para $\alpha = -1$, las ecuaciones se reducen a $-x - y + z = 1$. Tomando $x = s$, $y = t$, queda $z = 1 + s + t$. - Para $\alpha = 0$, las ecuaciones se reducen a $z = 1$; x e y son libres. - Para $\alpha = 1$, las ecuaciones se reducen a $x + y + z = 1$. Tomando $x = s$, $y = t$, queda $z = 1 - s - t$.

$$\begin{array}{ll}\alpha = -1: & (x, y, z) = (s, t, 1 + s + t), \\ \alpha = 0: & (x, y, z) = (s, t, 1), \quad s, t \in \mathbb{R}. \\ \alpha = 1: & (x, y, z) = (s, t, 1 - s - t),\end{array}$$

Conclusión de la discusión

$$\begin{array}{ll}\alpha \neq -1, 0, 1 & : \text{SCD}, \\ \alpha = -1, 0, 1 & : \text{SCI}, \\ \text{ningún valor de } \alpha & : \text{SI}.\end{array}$$

Problema A.2 - Plano, recta perpendicular y punto más cercano

Se conocen $O = (0, 0, 0)$, $A = (6, -3, 0)$, $B = (3, 0, 1)$ y $P = (8, 7, -2)$.

a) Ecuación general del plano π

Dos vectores directores del plano se obtienen restando las coordenadas de O :

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (6, -3, 0), \quad \overrightarrow{OB} = B - O = (3, 0, 1).$$

Un vector normal es el producto vectorial de esos vectores:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -6, 9).\end{aligned}$$

Podemos simplificarlo dividiendo entre -3 : $\vec{n} = (1, 2, -3)$. La forma general de un plano con normal (A, B, C) que pasa por O es $Ax + By + Cz = 0$. Sustituimos:

$$\pi: x + 2y - 3z = 0.$$

b) Recta r por P perpendicular a π

Una recta perpendicular al plano tiene como vector director un vector normal del plano. Usamos $(1, 2, -3)$ y escribimos la recta exclusivamente en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 8 + t, \\ y = 7 + 2t, \\ z = -2 - 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) Punto Q del plano más cercano a P

La perpendicular desde un punto a un plano llega al punto del plano que está a menor distancia. Para encontrarlo, intersectamos r con π . Sustituimos las coordenadas de la recta en la ecuación general del plano:

$$\begin{aligned}(8 + t) + 2(7 + 2t) - 3(-2 - 3t) &= 0, \\ 8 + t + 14 + 4t + 6 + 9t &= 0, \\ 28 + 14t &= 0, \\ t &= -2.\end{aligned}$$

Reemplazamos $t = -2$ en la recta:

$$Q = (8 - 2, 7 - 4, -2 + 6) = (6, 3, 4).$$

Este punto sí pertenece al plano, pues $6 + 2(3) - 3(4) = 0$. Para comprobar que es el más cercano, tomamos cualquier otro punto X del plano. El segmento QX está en el plano y PQ es perpendicular a él; por Pitágoras,

$$PX^2 = PQ^2 + QX^2 \geq PQ^2.$$

Como $PX^2 \geq PQ^2$ para cualquier X del plano, $Q = (6, 3, 4)$ es el único punto que minimiza la distancia a P .

Problema A.3 - Intersección, desigualdad y área entre curvas

$$f(x) = x^3, g(x) = 2x^2 - x.$$

Las dos funciones son polinómicas; por eso están definidas para cualquier número real y $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$. No hay asíntotas verticales porque no se excluye ningún valor de x . Tampoco hay horizontales: cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x)$ y $g(x)$ tienden a $+\infty$, y cuando $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$ y $g(x) \rightarrow +\infty$. Para que hubiera una asíntota oblicua, la pendiente tendría que ser finita; sin embargo,

$$\frac{f(x)}{x} = x^2 \rightarrow +\infty, \frac{g(x)}{x} = 2x - 1 \rightarrow \begin{cases} +\infty, & x \rightarrow +\infty, \\ -\infty, & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Así que ninguna de las dos curvas tiene asíntota oblicua.

Estudiamos también el crecimiento antes de comparar las curvas. Para f :

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, f'(-1) = 3 > 0, f'(1) = 3 > 0.$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
prueba para f'	-1	-	1
$f'(x)$	+	0	+
comportamiento de f	crece	sin extremo	crece

Por tanto, f crece en todo $\mathbb{R}$, no tiene máximo ni mínimo y el punto estacionario $x = 0$ no cambia su monotonía. Para g :

$$g'(x) = 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}, g'(0) = -1 < 0, g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0.$$

x	$(-\infty, \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4}, +\infty)$
prueba para g'	0	-	$\frac{1}{2}$
$g'(x)$	-	0	+
comportamiento de g	decrece	mínimo	crece

El mínimo de g es $g(1/4) = 2(1/4)^2 - 1/4 = -1/8$; además, $g(x) \rightarrow +\infty$ en ambos extremos.

a) Puntos de intersección

En un punto de intersección las dos ordenadas coinciden, es decir, $f(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned} x^3 &= 2x^2 - x, \\ x^3 - 2x^2 + x &= 0, \\ x(x-1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Luego $x = 0$ o $x = 1$. Sustituimos en cualquiera de las funciones:

$$f(0) = 0, f(1) = 1.$$

Los puntos son $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$.

b) Demostrar que $f(x) \geq g(x)$ para $x \geq 0$

Restamos las funciones y factorizamos:

$$f(x) - g(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2.$$

Si $x \geq 0$, el factor x es no negativo y $(x-1)^2$ también lo es. Por tanto,

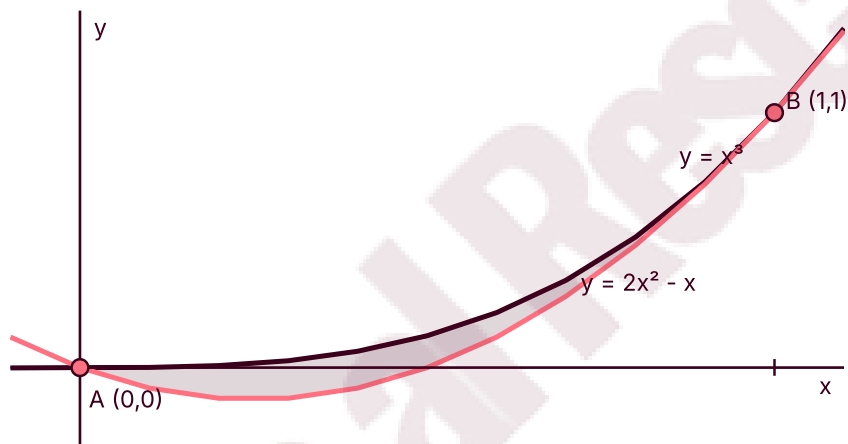
$$f(x) - g(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq g(x) \text{ para todo } x \geq 0.$$

c) Área encerrada entre A y B

El área entre dos curvas se calcula integrando la función superior menos la inferior entre las abscisas de intersección. En $[0, 1]$, el apartado anterior demuestra que f es la curva superior:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 (f(x) - g(x)) \, dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) \, dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) - (0 - 0 + 0) \\ &= \boxed{\frac{1}{12} \text{ unidades}^2}.\end{aligned}$$

El dibujo propio sitúa los dos puntos de corte y sombrea la región cuya área acabamos de calcular:



Opción B - Matrices, rectas y optimización

Problema B.1 - Determinantes de matrices

$$A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix}, B(y) = \begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Valor de x para que $\det A(x) = 6$

Usamos que restar a una fila otra fila no cambia el determinante. Hacemos $F_2 \leftarrow F_2 - F_1$ y $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$:

$$\det A(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A(x) &= (x+2)(2(-1) - (-1)4) - 4(0(-1) - (-1)1) + 3(0 \cdot 4 - 2 \cdot 1) \\ &= 2(x+2) - 4 - 6 \\ &= 2x - 6. \end{aligned}$$

Imponemos el valor solicitado:

$$2x - 6 = 6 \implies 2x = 12 \implies \boxed{x = 6}.$$

b) Determinante de $2A(x)$

Para una matriz 3×3 , multiplicar toda la matriz por 2 multiplica el determinante por 2^3 :

$$\det(2A(x)) = 2^3 \det A(x).$$

Con $x = 6$, $\det A(6) = 6$. Por tanto,

$$\boxed{\det(2A(6)) = 8 \cdot 6 = 48}.$$

c) Demostrar que $B(y)$ no tiene inversa para ningún $y \in \mathbb{R}$

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante no es cero. Comparamos sus filas:

$$\begin{aligned} F_2 - F_1 &= (1, 2, -1), \\ F_3 - F_2 &= (1, 2, -1). \end{aligned}$$

Así, $F_3 = 2F_2 - F_1$, por lo que las filas son linealmente dependientes para cualquier y . En consecuencia,

$$\det B(y) = 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{R}, \quad \boxed{B(y) \text{ nunca tiene inversa.}}$$

Problema B.2 - Intersección y ángulo de dos rectas; plano que las contiene

Para cumplir la indicación de expresar las rectas en forma paramétrica, convertimos las ecuaciones del enunciado antes de calcular su intersección.

a) Punto de intersección P

En r , el valor común t da el punto $(4, 4, 4)$ y la dirección $(3, 2, 1)$. En s , el valor común u da el punto $(0, 0, 0)$ y la dirección $(1, 2, 3)$. Así quedan las rectas en forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = 4 + 3t, \\ y = 4 + 2t, \\ z = 4 + t, \end{cases} s : \begin{cases} x = u, \\ y = 2u, \\ z = 3u, \end{cases} t, u \in \mathbb{R}.$$

En el punto de corte coinciden las tres coordenadas:

$$u = 4 + 3t, \quad u = 2 + t, \quad 4 + t = 3u.$$

Igualamos las dos expresiones de u :

$$4 + 3t = 2 + t \implies t = -1, \quad u = 1.$$

La tercera igualdad se verifica: $4 - 1 = 3 = 3 \cdot 1$. Por tanto, el punto de intersección es $\boxed{P = (1, 2, 3)}$.

b) Ángulo que forman las rectas

Sus vectores directores se leen de las ecuaciones paramétricas:

$$\vec{v}_r = (3, 2, 1), \vec{v}_s = (1, 2, 3).$$

Para el ángulo menor entre dos rectas usamos $\cos \theta = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{\|\vec{v}_r\| \|\vec{v}_s\|}$. Calculamos producto escalar y módulos:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 10, \|\vec{v}_r\| = \|\vec{v}_s\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}.$$

Luego

$$\cos \theta = \frac{10}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{5}{7}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{5}{7}\right) \approx 44.42^\circ.$$

c) Ecuación general del plano que contiene a r y s

Como ambas rectas se cortan en P , sus dos vectores directores pertenecen al plano. Un vector normal es su producto vectorial:

$$\vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (4, -8, 4) = 4(1, -2, 1).$$

Tomamos $\vec{n} = (1, -2, 1)$. La ecuación de un plano con normal (A, B, C) que pasa por $P = (1, 2, 3)$ es $A(x-1) + B(y-2) + C(z-3) = 0$. Sustituimos:

$$(x-1) - 2(y-2) + (z-3) = 0, \\ x - 2y + z = 0.$$

Por tanto, en forma general,

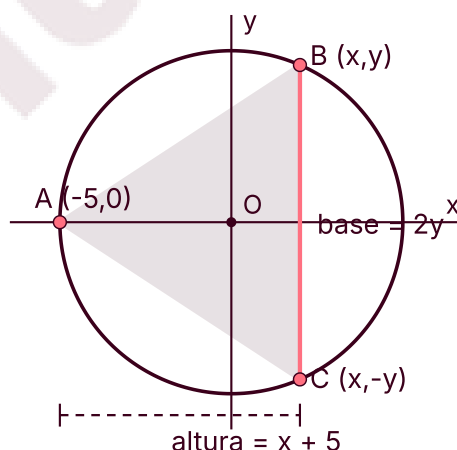
$$\pi: x - 2y + z = 0.$$

Problema B.3 - Área máxima de un triángulo inscrito

La circunferencia tiene centro $O = (0, 0)$ y radio 5; $A = (-5, 0)$, $B = (x, y)$ y $C = (x, -y)$. Como B y C están en la circunferencia,

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Podemos tomar $y \geq 0$, porque cambiar y por $-y$ solo intercambia los nombres de B y C . La figura propia muestra la base vertical BC y la altura horizontal desde A :



a) Área del triángulo en función de x

Como $y \geq 0$, la base y la altura del triángulo son

$$BC = 2y = 2\sqrt{25 - x^2}, \quad h = x + 5.$$

La recta BC es vertical, así que h es la distancia horizontal desde $A = (-5, 0)$. Usamos $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bh$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= \frac{1}{2} (2\sqrt{25 - x^2}) (x + 5) \\ &= \boxed{(x + 5)\sqrt{25 - x^2}}, \quad -5 \leq x \leq 5.\end{aligned}$$

La raíz exige $25 - x^2 \geq 0$, luego $\text{Dom}(\mathcal{A}) = [-5, 5]$. La función es continua y finita en los extremos, con $\mathcal{A}(-5) = \mathcal{A}(5) = 0$; no hay asíntotas verticales. Como el dominio es acotado y no admite $x \rightarrow \pm\infty$, tampoco hay asíntotas horizontales u oblicuas. Para estudiar los puntos críticos interiores, derivamos en $-5 < x < 5$.

b) Vértices B y C que maximizan el área

Derivamos con la regla del producto y la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'(x) &= \sqrt{25 - x^2} + (x + 5) \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} \\ &= \frac{25 - x^2 - x(x + 5)}{\sqrt{25 - x^2}} \\ &= \frac{25 - 2x^2 - 5x}{\sqrt{25 - x^2}} \\ &= -\frac{(x + 5)(2x - 5)}{\sqrt{25 - x^2}}.\end{aligned}$$

En el dominio interior, $\sqrt{25 - x^2} > 0$ y $x + 5 > 0$. Para hallar los puntos críticos resolvemos:

$$25 - 2x^2 - 5x = 0 \iff (x + 5)(2x - 5) = 0 \iff x = -5 \text{ o } x = \frac{5}{2}.$$

El valor $x = -5$ es un extremo del dominio y se comprueba aparte; el único punto crítico interior es $x = 5/2$. El signo de la derivada dentro del dominio depende de $-(2x - 5)$. Comprobamos un valor de cada intervalo:

x	-5	$(-5, 5/2)$	5/2	$(5/2, 5)$	5
Prueba extremo	0	—	4	—	extremo
$\mathcal{A}'(x)$	no se usa	+	0	-	no se usa
$\mathcal{A}(x)$	0	crece	máximo	decrece	0

La función crece antes de $5/2$ y decrece después. Además, en los extremos del intervalo cerrado su valor es cero, por lo que el máximo es absoluto y se alcanza en $x = 5/2$.

Calculamos la ordenada usando la circunferencia:

$$y^2 = 25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4} \implies y = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

donde elegimos la raíz positiva para B ; C tiene la opuesta. Por tanto,

$$\boxed{B = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right), \quad C = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

c) Valor máximo del área

Sustituimos $x = 5/2$ en la función del área:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\max} &= \left(\frac{5}{2} + 5\right) \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \frac{15}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ &= \boxed{\frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ unidades}^2} \approx \boxed{32.48 \text{ unidades}^2}.\end{aligned}$$